

Ein allgemeines Ersatzmodell zur
nichtlinearen Berechnung
des Störverhaltens von Phasenregelkreisen

von
Werner Rosenkranz

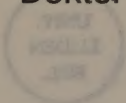
Erlangen · 1980

1980 # 383

Ein allgemeines Ersatzmodell zur nichtlinearen Berechnung des Störverhaltens von Phasenregelkreisen

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen - Nürnberg
zur Erlangung des Grades

Doktor - Ingenieur



vorgelegt von
Werner Rosenkranz

Erlangen · 1980



Als Dissertation genehmigt von der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 30.4.1980

Tag der Promotion : 1.8.1980

Dekan : Prof.Dr.-Ing. H.Niemann

Berichterstatter : Prof.Dr.-Ing. M.Brunk
Prof.Dr.phil.nat. H.Schlitt

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.-Ing. M.Brunk für die interessante Aufgabenstellung und für seine freundliche Unterstützung in jeder Phase der Arbeit, die er durch stete Gesprächsbereitschaft und zahlreiche Anregungen und Ratschläge sehr gefördert hat.

Herrn Prof.Dr.phil.nat. H.Schlitt danke ich für die Übernahme des Zweitreferates und sein damit bekundetes Interesse.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen	V
1. Einführung	1
2. Grundlagen und allgemeine Voraussetzungen	4
2.1 Beschreibung des PLL-Systems und der Rausch- störung	4
2.2 Nichtlineares Ersatzmodell für den gestörten PLL mit Phasendiskriminator ohne Begrenzer	10
2.3 Das "Wellblechmodell"	15
2.4 Eigenschaften des linearisierten Systems	17
3. Entwicklung eines nichtlinearen Ersatzmodells für den gestörten PLL mit Begrenzer-Phasendiskriminator	20
3.1 Allgemeine Beschreibung gestörter Phasendiskri- minatoren	21
3.2 Die Berechnung der Modellkennlinien	24
3.3 Die Berechnung der Leistung des äquivalenten Phasenrauschens	29
3.4 Die Berechnung der Rauschbandbreite des äquivalenten Phasenrauschens	32

3.5 Zusammenfassende Beschreibung des PLL-Ersatzmodells	36
3.6 Vereinfachungen des PLL-Ersatzmodells	42
3.6.1 Die äquivalente Verstärkung	43
3.6.2 Linearisierung der Modellkennlinie	45
3.6.3 Gesamtlinearisierung	47
4. Nichtlineare Berechnungsverfahren für das PLL-Störverhalten	49
4.1 Verteilungsdichte und Varianz des Phasenfehlers	50
4.1.1 Näherungsweise Berechnung mit dem linearen und quasilinearen Modell	51
4.1.2 Berechnung des PLL 1. Ordnung mit der Fokker-Planck-Gleichung	54
4.1.3 Berechnung des PLL 2. Ordnung mit der Fokker-Planck-Gleichung	56
4.1.3.1 Lösung bei linearer Näherung des bedingten Erwartungswertes	58
4.1.3.2 Lösung bei quasilinearer Näherung des bedingten Erwartungswertes	61
4.2 Die Häufigkeit von Phasensprüngen	61
4.3 Das Fangverhalten	65
4.3.1 Die Berechnung des Haltebereichs	67
4.3.2 Die Berechnung des Fangbereichs	70
4.4 Das Störverhalten von PLL-FM-Demodulatoren	79
4.4.1 Das PLL-FM-Demodulatorsystem	80
4.4.2 Der Störabstand bei großen Signal-Rauschverhältnissen	83
4.4.3 Näherungsweise Berechnung der Demodulatorschwelle	87
4.4.4 Optimierung der Demodulatorschwelle	91

5. Anwendung des allgemeinen, nichtlinearen Ersatzmodells für die Berechnung des PLL-Störverhaltens	95
5.1 Meßverfahren für das PLL-Störverhalten	95
5.2 Berechnung und Messung der Varianz des Phasenfehlers	99
5.2.1 Der PLL 1. Ordnung	99
5.2.2 Der PLL 2. Ordnung	105
5.2.3 Vergleich der Störabstandsverbesserung durch den PLL	114
5.3 Berechnung und Messung der Häufigkeit von 2π -Phasensprüngen	117
5.4 Berechnung und Messung des Fangverhaltens	123
5.4.1 Der Haltebereich	123
5.4.2 Der Fangbereich	126
5.4.3 Hysterese zwischen Halte- und Fangbereich	134
5.5 Berechnung und Messung des Störverhaltens von PLL-FM-Demodulatoren	135
5.5.1 Optimaldimensionierung des PLL-FM-Demodulators	135
5.5.2 Die Demodulatorschwelle bei Optimaldimensionierung	137
5.5.3 Die Störabstandskurven des optimierten PLL-FM-Demodulators	139
6. Zusammenfassung	145

Anhang	148
A1 Berechnung der Signal-Unterdrückungsfaktoren	148
A2 Berechnung der Leistung $\overline{n'^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie	150
A3 Berechnung der Leistung $\overline{n'^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie	152
A4 Berechnung der Leistung $\overline{n'^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie	154
A5 Berechnung der Bandbreite B_1 beim Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie	156
A6 Berechnung der äquivalenten Verstärkungsfaktoren	160
A7 Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten für den PLL 1. Ordnung	162
A8 Zur Berechnung der mittleren Zeit zwischen 2π -Phasensprüngen	163
Literaturverzeichnis	166

VERZEICHNIS DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN

a	Parameter für Rauschleistung, PLL 1.Ordnung s. Gl.(4.15)
a_e	Parameter für Rauschleistung, PLL 2.Ordnung s. Gl.(4.36)
a_L	Parameter für Rauschleistung, PLL 2.Ordnung s. Gl.(4.31)
$A(t)$	Einhüllende des verrauschten Empfangssignals
$A_{\nu, \mu}$	Fokker-Planck-Koeffizient
B_1	äquivalente Rauschbandbreite des HF-Vorfilters
B'_1	Rauschbandbreite des äquivalenten Phasenrauschens
d	normierte PLL-Eigenfrequenz f_o/f_m
d_{opt}	optimale normierte PLL-Eigenfrequenz für minimale FM-Schwelle
D	Dämpfungsfaktor
DR m.B.	Abkürzung für 'Begrenzer-Diskriminator mit Dreieck- kennlinie'
$E\{x(t)\}$	Erwartungswert von $x(t)$
f_g	Grenzfrequenz des idealen Ausgangs-Tiefpaß des FM-Demodulators
f_m	Frequenz des modulierenden NF-Signals
f_R	PLL-Rauschbandbreite bei Gesamtlinearisierung
f_{Re}	effektive PLL-Rauschbandbreite des quasilinearen Modells
f_{RL}	effektive PLL-Rauschbandbreite des linearisierten Modells
f_o	PLL-Eigenfrequenz
$f(t)$	Impulsantwort des Kreisfilters

$F(s)$	Übertragungsfunktion des Kreisfilters
$F_O(s)$	Übertragungsfunktion des Kompensationsfilters
$g(\phi)$	von der Eingangs-Phasendifferenz abhängige nicht-lineare Phasendiskriminator-Charakteristik
$g'(\phi)$	nichtlineare Modellkennlinie des Phasendiskriminators
g'_O	Steigung der Modellkennlinie im Ursprung
G_{TP}	Gewinnfaktor des Ausgangs-Tiefpaß des FM-Demodulators
$G(s)$	Phasen-Übertragungsfunktion des PLL bei Gesamtlinearisierung
$G_e(s)$	effektive PLL-Phasen-Übertragungsfunktion des quasilinearen Modells
$G_L(s)$	effektive PLL-Phasen-Übertragungsfunktion des linearisierten Modells
$G_O(s)$	Übertragungsfunktion des offenen PLL-Kreises bei Gesamtlinearisierung
$G^{FM}(s)$	Übertragungsfunktion des PLL-FM-Demodulators bei Gesamtlinearisierung
$G'(\phi)$	Potential (=Integral) der Modellkennlinie
$H_{TP}(s)$	Übertragungsfunktion des Ausgangs-Tiefpaß des FM-Demodulators
I_v	modifizierte Besselfunktion v -ter Ordnung
k	=1,3,5..., Menge der ungeraden natürlichen Zahlen
K	Kreisverstärkung des PLL
K_D	Phasendiskriminatorkonstante
K_e	äquivalenter Verstärkungsfaktor
K_O	VCO-Empfindlichkeit
l	=2,4,6,..., Menge der geraden natürlichen Zahlen
m	Teilerfaktor des Kreisfilters
M	Kreisfrequenzhub

$n(t)$	Rauschspannung nach dem HF-Vorfilter (Schmalbandrauschen)
$\overline{n^2(t)}$	quadratischer Mittelwert (Leistung) von $n(t)$
$n_i(t)$	weißes, gaußverteiltes Kanalrauschen
$n_s(t), n_c(t)$ $N_s(t), N_c(t)$	Komponenten des Schmalbandrauschens $n(t)$
$n'(t)$	äquivalentes Phasenrauschen
$\overline{n'^2(t)}$	quadratischer Mittelwert (Leistung) von $n'(t)$
N_O	konstante Rauschleistungsdichte am Eingang
N'_O	Rauschleistungsdichte des äquivalenten Phasenrauschens bei $\omega=0$
$p(x)$ $q(x)$	Verteilungsdichtefunktion
$R_x(\tau)$	Autokorrelationsfunktion von x
s	komplexe Frequenzvariable
$S_x(\omega)$	spektrale Leistungsdichte von x
SIN m.B.	Abkürzung für 'Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie'
SIN o.B.	Abkürzung für 'Diskriminator ohne Begrenzer mit Sinuskennlinie'
$(SNR)_1$	Eingangs HF-Signal-Rauschverhältnis [$(SNR)_1 = \alpha \cdot v$]
$(SNR)_2$	PLL-Ausgangs-Signal-Rauschverhältnis
$(SNR)_{PLL}$	Signal-Rauschverhältnis-Gewinn des PLL, $(SNR)_2 / (SNR)_1$
$(SNR)_A$ $(SNR)_A^D$ $(SNR)_A^{TP}$	Ausgangs-NF- (SNR) des FM-Demod. $\left\{ \begin{array}{l} \text{allgemein} \\ \text{am Demod. Ausgang} \\ \text{am Ausgangs-TP} \end{array} \right.$
$(SNR)_E$	Normiertes Eingangs-HF-Signal-Rauschverhältnis
$(SNR)_{ESW}$	$(SNR)_E$ an der Demodulatorschwelle

SZ m.B.	Abkürzung für 'Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie'
T	Zeitkonstante des Kreisfilters
T_p	Periodendauer
$u_{Tp}(t)$	Demodulierte Spannung nach dem Ausgangs-Tiefpaß
$u_D(t)$	Demodulierte Spannung vor dem Ausgangs-Tiefpaß
$u_O(t)$	Phasendiskriminator-Ausgangsspannung
$u_1(t)$	Referenzspannung
$u_2(t)$	VCO-Ausgangsspannung
$u_3(t)$	Kreisfilter-Ausgangsspannung
v	Bandbreitenverhältnis f_R/B_1
x y	{ Normierte Hilfsgrößen zur Fangbereichsberechnung
z_g	
	Normierte Grenzfrequenz des idealen Ausgangs-Tiefpaß des FM-Demodulators f_g/f_O
$1/\alpha$	Normierte Eingangs-Rauschleistung [$1/\alpha = v/(SNR)_1$]
$1/\alpha_e$	Varianz des Phasenfehlers, berechnet mit dem quasilinearen Modell
$1/\alpha_L$	Varianz des Phasenfehlers, berechnet mit dem linearisierten Modell
$\delta_O(t)$	Dirac-Impuls
η	Modulationsindex
μ_v	Signal-Unterdrückungsfaktor der v-ten Zone
v	$=1,2,3,\dots$, Menge der natürlichen Zahlen
σ_n^2	NF-Rauschleistung
σ_s^2	NF-Signalleistung
σ_φ^2	Varianz des Phasenfehlers

$\sigma_{\varphi SW}^2$	Varianz des Phasenfehlers an der Demodulator-schwelle
$\overline{\tau_{2\pi}}$	Mittlere Zeit zwischen 2π -Phasensprüngen
φ	Phasenfehler $\phi_1 - \phi_2$
φ_p	statischer Phasenfehler
φ_n	Rauschanteil des Phasenfehlers
φ_s	Signalanteil des Phasenfehlers
ϕ	Phasendifferenz der Diskriminator Eingangssignale
ϕ_n	Störphase des verrauschten Eingangssignals $u_1 + n$
ϕ_1	Phase des Referenzsignals u_1
ϕ_2	Phase des VCO-Signals u_2
ψ_m	Phase des modulierenden Signals
ψ_n	Phase des harmonischen Störsignals
ω_m	Kreisfrequenz des modulierenden Signals
ω_n	Kreisfrequenz des harmonischen Störsignals
ω_s	statische Regelsteilheit $K_O \cdot K_D$
ω_O	PLL-Eigenkreisfrequenz
$\omega(t)$	Differenzkreisfrequenz $d\varphi/dt$
Ω_{VCO}	Momentane Kreisfrequenz des VCO
Ω_{20}	VCO-Ruhekreisfrequenz
$\Delta\Omega$	Kreisfrequenzverstimmung
$\Delta\Omega_F$	Fangbereich
$\Delta\Omega_H$	Haltebereich

1. EINFÜHRUNG

Nachrichtenempfangssysteme, die sich auf das Prinzip des Phasenregelkreises - andere Bezeichnungen sind: Phase-Locked Loop, PLL oder Nachlaufsynchroisation - zurückführen lassen, finden seit einigen Jahren zunehmende Verbreitung. Bei vielen dieser Anwendungen ist das Verhalten des Regelkreises bei Rauschstörungen von großer Bedeutung. Es sei an dieser Stelle nur das Gebiet der Raumfahrttechnik erwähnt. Hier hat der Bedarf an Empfangssystemen, die wegen der begrenzten zur Verfügung stehenden Sendeleistung auch noch bei extrem kleinen Signal-Rauschverhältnissen arbeiten, Anfang der sechziger Jahre zu einer raschen Entwicklung sowohl der Technik als auch der theoretischen Analyse der vielfältigen nichtlinearen Effekte des Phasenregelkreises geführt. In dieser Zeit entstand ein großer Teil der Arbeiten, die das Störverhalten unter Berücksichtigung der das PLL-Prinzip kennzeichnenden periodischen Nichtlinearität behandeln, und die heute vorhandenen Berechnungsverfahren für das Störverhalten wurden erstmals für die Beschreibung des Phasenregelkreises herangezogen [1,2,3,4,5].

Alle diese Berechnungsverfahren setzen jedoch voraus, daß der Phasendiskriminator des Regelkreises als analoger Multiplizierer aufgebaut ist, so wie dies bei den ursprünglichen PLL-Realisierungen üblich war. Inzwischen sind aber Phasendiskriminatoren weit verbreitet - besonders bei den heute in integrierter Form erhältlichen PLL-Schaltungen - die mit digitalen Bausteinen realisiert werden und deswegen eine harte Amplituden-Begrenzung des verrauschten Empfangssignals benötigen. Auch im Fall des analogen Multiplizierers wird oft eine Begrenzung des Empfangssignals vorgenommen, um negative Auswirkungen von Schwunderscheinungen zu eliminieren.

Für diese Klasse von Phasenregelkreisen mit Begrenzer-Diskriminatoren ist die Anwendung der bekannten Berechnungsverfahren für das Störverhalten zunächst nicht möglich. Entsprechend ist der Einfluß solcher Begrenzer-Diskriminatoren auf

die statistischen Kenngrößen des gestörten Regelkreises weitgehend ungeklärt.

Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Arbeit versucht, ein allgemeines Ersatzmodell für den gestörten Phasenregelkreis zu entwickeln, das als Grundlage zur Berechnung des Störverhaltens für beliebige periodisch nichtlineare Phasendiskriminator-Charakteristiken mit oder ohne Begrenzer dienen kann. Auf diesem Ersatzmodell aufbauend, wird eine Reihe von interessierenden statistischen Kenngrößen für Phasenregelkreise mit Begrenzer-Diskriminatoren am Beispiel von drei typischen Formen der periodischen Nichtlinearität - nämlich sinusförmig, dreieckförmig und sägezahnförmig - berechnet. Dabei zeigt sich, daß die Begrenzung einen wesentlichen Einfluß auf das Störverhalten des Regelkreises hat.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die zugrundegelegte PLL-Schaltung und die Störung definiert und das bekannte nichtlineare Ersatzmodell für den gestörten PLL mit Analogmultiplizierer - also für den Fall einer sinusförmigen Phasendiskriminator-Charakteristik ohne Begrenzer - beschrieben, das als Ansatz für die bisherigen Berechnungsverfahren dient. Zur Veranschaulichung des nichtlinearen Systemverhaltens wird ein mechanisches Analogon angegeben.

Im Kapitel 3 wird das allgemeine, nichtlineare Ersatzmodell für Begrenzer-Diskriminatoren entwickelt. Für die drei Fälle: Sinus-, Dreieck- und Sägezahnkennlinie werden die zur anschließenden Berechnung des Störverhaltens notwendigen Parameter des Modells explizit angegeben. Wie beim bekannten Modell für Phasenregelkreise ohne Begrenzer lassen sich auch hier Vereinfachungen der Nichtlinearitäten - im wesentlichen Linearisierungen - vornehmen, die für Näherungslösungen sehr nützlich sind.

Im vierten Kapitel werden Berechnungsverfahren für die verschiedenen Kenngrößen zum PLL-Störverhalten zusammengestellt. In allen Fällen wird dabei auf eine allgemeine Darstellung Wert gelegt, die nur auf der gemeinsamen Struktur der nichtlinea-

ren Modelle von Kapitel 2 und Kapitel 3 aufbaut, so daß die Formeln für beliebige Diskriminator-Kennlinien mit und ohne Begrenzer gelten. In Abschnitt 4.1 und 4.2 bei der Behandlung der Statistik des Phasenfehlers war es dafür notwendig, aus der Literatur bekannte Berechnungsverfahren zu verallgemeinern. Die Berechnung des Fangverhaltens bei Rauschstörungen war bisher nicht bekannt. Daher wird in Abschnitt 4.3 hierfür ein Näherungsverfahren entwickelt. Auch das Näherungsverfahren für die Berechnung und Optimierung der Demodulatorschwelle in Abschnitt 4.4 wurde im Hinblick auf eine nachfolgende Auswertung auch für Begrenzer-Diskriminatoren im wesentlichen neu entwickelt.

Schließlich werden im fünften Kapitel explizite Ergebnisse der Berechnungen nach den in Kapitel 4 zusammengestellten Verfahren angegeben. Die wesentlichen Kenngrößen des PLL-Störverhaltens werden damit erstmals für Begrenzer-Diskriminatoren berechnet und so die Nützlichkeit des allgemeinen Ersatzmodells gezeigt. Die Ergebnisse werden jeweils im Vergleich zur ohne Begrenzung realisierten sinusförmigen Phasendiskriminator-Charakteristik dargestellt und durch umfangreiche Messungen überprüft.

2. GRUNDLAGEN UND ALLGEMEINE VORAUSSETZUNGEN

2.1 Beschreibung des PLL-Systems und der Rauschstörung

Den Untersuchungen dieser Arbeit liegt die in Bild 2.1 als Blockschaltung dargestellte Struktur aus Signalquelle, Störeinkopplung und PLL-Empfangssystem zugrunde.

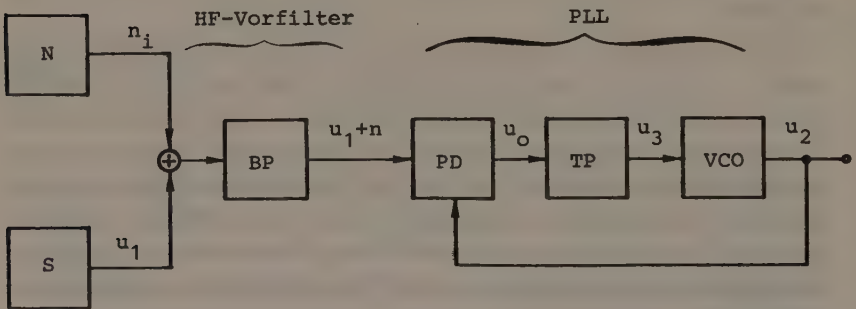


Bild 2.1 Blockschaltbild des PLL-Empfangssystems für verrauschte Signale

Eine Signalquelle S sendet ein i.a. sinusförmiges Trägersignal $u_1(t)$ -moduliert oder unmoduliert- aus. Auf dem Übertragungsweg wird weißes, gaußverteiltes Kanalrauschen $n_1(t)$, in Bild 2.1 dargestellt durch die Rauschquelle N , additiv überlagert.

Im Empfangssystem ist dem Phasenregelkreis zunächst ein Bandpaß (BP) als HF-Vorfilter mit der äquivalenten Rauschbandbreite B_1 [z.B.6] vorgeschaltet, der das Sendesignal nicht beeinflusst, aber das weiße Kanalrauschen auf ein Frequenzband der Breite B_1 beschränkt. Am PLL-Eingang hat die Stör-

rung dann die Eigenschaften von Schmalbandrauschen [z.B.6].
Somit ist das Eingangssignal des PLL die Summe aus dem Sende-
oder Referenzsignal $u_1(t)$

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \sin(\Omega_{20}t + \phi_1) \quad (2.1)$$

und gaußverteiletem, mittelwertfreien Schmalbandrauschen
 $n(t)$ mit den möglichen analytischen Darstellungen [6,7]:

$$n(t) = n_c(t) \cos \Omega_{20}t - n_s(t) \sin \Omega_{20}t \quad (2.2a)$$

$$= N_c(t) \cos(\Omega_{20}t + \phi_1) - N_s(t) \sin(\Omega_{20}t + \phi_1) \quad (2.2b)$$

Die Störung $n(t)$ am PLL-Eingang hat spektrale Anteile, die symmetrisch zur Mittenfrequenz Ω_{20} liegen. Die Rauschleistungs-dichte S_n ist im Durchlaßbereich B_1 des HF-Vorfilters konstant (idealer Bandpaß. Dabei dient die Annahme eines idealen Bandpasses nur der Vereinfachung. Im folgenden ist lediglich zu fordern, daß S_n in einem Frequenzbereich entsprechend der PLL-Rauschbandbreite konstant ist):

$$S_n(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \Omega_{20} - \pi B_1 \leq |\omega| \leq \Omega_{20} + \pi B_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3)$$

(Leistungsdichtespektren werden, wenn nicht anders erwähnt, im folgenden stets im Bereich $-\infty \leq \omega \leq +\infty$, also zweiseitig, betrachtet. Weiterhin sind alle Leistungen normiert auf einen Abschlußwiderstand von 1Ω .) Die (normierte) Rauschleistung am Eingang des PLL ist demnach [z.B.6]:

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) d\omega = B_1 \cdot N_0 \quad (2.4)$$

Die hier aufgeführten Voraussetzungen bezüglich der Störung und des Sendesignals sind dieselben, wie sie üblicherweise in der Literatur [z.B.7,8] zugrundegelegt werden.

Der Phasendiskriminator PD, ein Tiefpaß TP als Kreisfilter und der spannungsgesteuerte Oszillator VCO in Bild 2.1 bilden den eigentlichen Phasenregelkreis.

Der Phasendiskriminator hat grundsätzlich die Aufgabe, aus dem PLL-Eingangssignal (u_1+n) und dem gegengekoppelten Ausgangssignal u_2 des VCO eine Spannung als Funktion der Phasendifferenz ϕ dieser Signale zu bilden. Diese Kennlinie über der Phasendifferenz ist wegen der 2π -Phasenunsicherheit stets periodisch und damit nichtlinear. Der nichtlineare Zusammenhang wird mit der Diskriminatorkonstanten K_D formelmäßig wie in Gl.(2.5) dargestellt.

$$u_o = K_D g(\phi) \quad (2.5)$$

(K_D ist so gewählt, daß die Steigung der Kennlinie im Ursprung Eins wird.) Im Rahmen dieser Arbeit werden Phasendiskriminatoren mit 2π -periodischen Kennlinien $g(\phi)$ der folgenden Form behandelt:

- sinusförmig
- dreieckförmig
- sägezahnförmig

Prinzipiell können alle diese Kennlinien sowohl mit als auch ohne Begrenzung des PLL-Eingangssignals und/oder des VCO-Ausgangssignals realisiert werden [9]. In praktischem Gebrauch sind jedoch nur die Kombinationen von Begrenzer und eigentlichem Phasenvergleich in den Bildern 2.2a-d, für

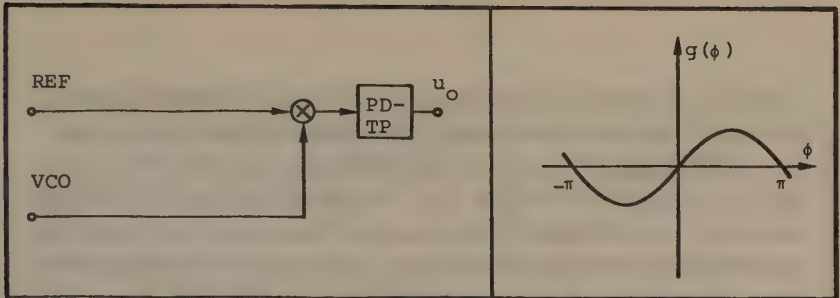


Bild 2.2a Sinus-PD ohne Begrenzer (SIN o.B.)

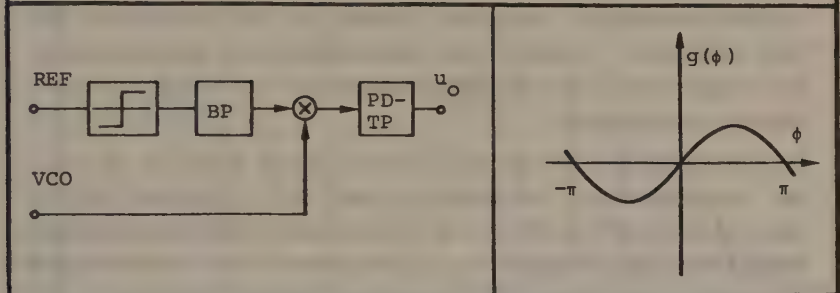


Bild 2.2b Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie (SIN m.B.)

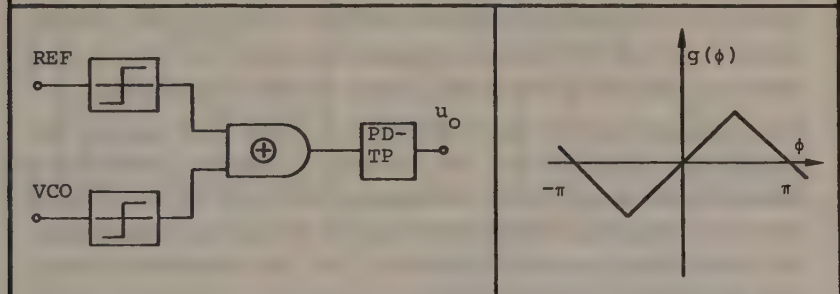


Bild 2.2c Begrenzer-PD mit Dreieckskennlinie (DR m.B.)

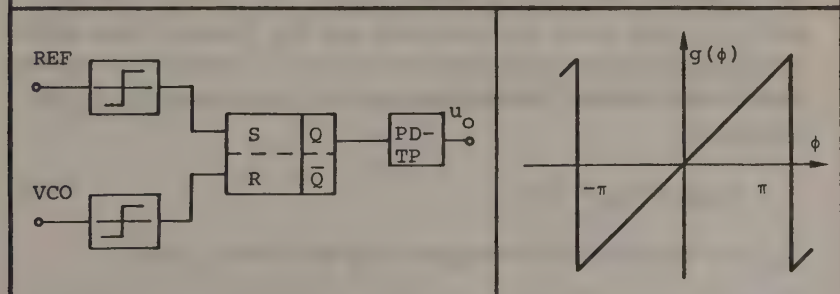


Bild 2.2d Begrenzer-PD mit Sägezahnkennlinie (SZ m.B.)

welche hier mögliche Realisierungsformen angegeben werden. Dreieck- und sägezahnförmige Diskriminator Kennlinien können darüberhinaus auch mit Analogmultiplizierern ohne Begrenzer entsprechend Bild 2.2a aufgebaut werden. Diese Formen sind von gewisser theoretischer Bedeutung, da sich hier unmittelbar - nur durch Ersetzen der sinusförmigen Nichtlinearität durch die entsprechende Kennlinie - die für den Sinus-Phasendiskriminator ohne Begrenzer entwickelten Berechnungsverfahren verwenden lassen [9]. Sie erfordern jedoch rechteck-, impuls- oder sägezahnförmige Sendesignale, die wegen des großen Bandbreitenbedarfs für Übertragungszwecke ausscheiden.

An den Ausgängen der Multiplizierer (Bild 2.2a und 2.2b), der 'Exklusiv-Oder'-(Bild 2.2c) bzw. der 'Flip-Flop'-Schaltung (Bild 2.2d) enthält das Zeitsignal neben dem Basisbandanteil mit der gewünschten ϕ -Abhängigkeit auch hochfrequente Störanteile (z.B. mit der doppelten Referenzfrequenz beim Multiplizierer), die jeweils durch Tiefpässe (PD-TP) praktisch vollständig weggefiltert werden. Entsprechend repräsentiert die Diskriminator-Ausgangsspannung u_o (s.Gl.2.5) stets nur das Basisbandsignal ohne solche Störanteile.

Als Tiefpaßfilter TP im Regelkreis (s.Bild 2.1) werden im Rahmen der Arbeit aktive und passive PI-Regler sowie die Anordnung ohne Kreisfilter behandelt, die auch in der Praxis fast ausschließlich verwendet werden [10]. Die Schaltungen mit ihren Übertragungsfunktionen $F(s)$ und Bode-Diagrammen sind in Bild 2.3 dargestellt.

Die Frequenz des spannungsgesteuerten Oszillators VCO in Bild 2.1 wird durch die Regelung auf die Frequenz des Referenzsignals nachgeführt (synchronisiert). Dabei wird der VCO durch eine lineare Steuerkennlinie mit der Steigung K_o beschrieben:

$$\Omega_{VCO} = \Omega_{20} + K_o u_3 \quad (2.6)$$

Ω_{20} ist die Ruhe-Kreisfrequenz des VCO (für $u_3=0$).

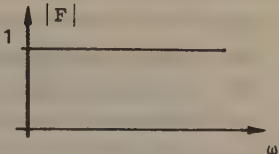
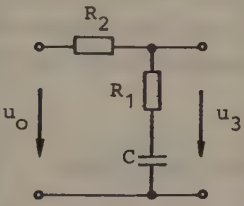
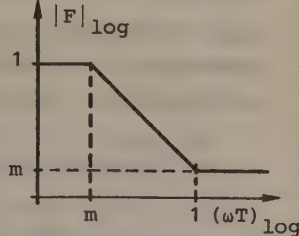
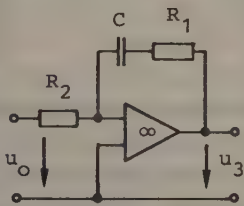
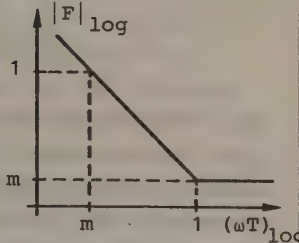
	Schaltung	Übertr.Fkt.	Bode-Diagramm
filterlos		$F(s) = 1$	
pass. PI-Regler		$F(s) = \frac{1+sT}{1+sT/m}$ $T = R_1 C$ $m = \frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1$	
akt. PI-Regler		$F(s) = m \frac{1+sT}{sT}$ $T = R_1 C$ $m = \frac{R_1}{R_2}$	

Bild 2.3 Beschreibung der behandelten Kreisfilter

2.2 Nichtlineares Ersatzmodell für den gestörten PLL mit Phasendiskriminator ohne Begrenzer

Im folgenden wird kurz auf die mathematische Beschreibung des gestörten Phasenregelkreises eingegangen und ein nichtlineares niederfrequentes Ersatzmodell abgeleitet, das als Ansatz für alle bisherigen Berechnungsverfahren dient. In seiner bekannten Form ist das Modell beschränkt auf Multiplizierer-Phasendiskriminatoren ohne Begrenzer gemäß Bild 2.2a [z.B. 7, 8].

Entsprechend dem Blockschaltbild 2.1 liegt die Summe aus dem Sendesignal $u_1(t)$ und dem Schmalbandrauschen $n(t)$ (s.Gl.2.2) am Eingang des Phasendiskriminators:

$$u_1(t) + n(t) = \hat{u}_1 \sin(\Omega_{20} t + \phi_1) + n_c \cos \Omega_{20} t - n_s \sin \Omega_{20} t \quad (2.7a)$$

$$= (\hat{u}_1 - N_s) \sin(\Omega_{20} t + \phi_1) + N_c \cos(\Omega_{20} t + \phi_1) \quad (2.7b)$$

$$= A(t) \sin(\Omega_{20} t + \phi_1 + \phi_n) \quad (2.7c)$$

(Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden Zeitfunktionen z.B. $\phi_n(t)$ im folgenden nicht immer durch Hinzufügen der Zeitvariablen t gekennzeichnet.) Gl.(2.7c) ist eine äquivalente Beschreibung des verrauschten Eingangssignals in Form eines harmonischen Signals mit der stochastischen Einhüllenden A

$$A(t) = \sqrt{(\hat{u}_1 - N_s)^2 + N_c^2} \quad (2.8)$$

und der Phase $\phi_1 + \phi_n$ wobei für die Eingangsstörphase ϕ_n gilt:

$$\phi_n(t) = \arctan \left[\frac{N_c}{\hat{u}_1 - N_s} \right] \quad (2.9)$$

Die Multiplikation des verrauschten Eingangssignals gemäß Gl.(2.7c) mit der rückgekoppelten VCO-Spannung u_2

$$u_2(t) = \hat{u}_2 \cos(\Omega_{20}t + \phi_2) \quad (2.10)$$

und anschließender Tiefpaßfilterung zur Eliminierung hochfrequenter Störanteile (s.Bild 2.2a) liefert für die Phasendiskriminator-Ausgangsspannung u_o :

$$u_o(t, \varphi) = \frac{1}{2} A(t) \hat{u}_2 \sin(\phi_1 + \phi_n - \phi_2) \quad (2.11a)$$

$$= \frac{1}{2} A(t) \hat{u}_2 \sin(\varphi + \phi_n) \quad (2.11b)$$

Aus Gl.(2.11a) erkennt man die sinusförmig nichtlineare Abhängigkeit der Diskriminatorspannung u_o von der Phase ϕ der Phase ($\phi_1 + \phi_n$) des verrauschten Eingangssignals ($u_1 + n$) und der Phase ϕ_2 des rückgekoppelten Signals u_2 . In Gl.(2.11b) wird die Definition des Phasenfehlers φ verwendet, der sich aus der Differenz der Phase ϕ_1 des unverrauschten Sendesignals u_1 und der Phase ϕ_2 der VCO-Spannung u_2 ergibt:

$$\varphi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \quad (2.12)$$

Für weitere Berechnungen und für die Aufstellung eines niederfrequenten Modells ist die Diskriminatorspannung u_o in Form der Gl.(2.11) aus folgenden Gründen nicht unmittelbar geeignet:

- Phasen- und Amplitudenrauschen sind zu berücksichtigen.
- Die sinusförmige Nichtlinearität wird von der vergleichsweise großen Eingangsstörphase stark angesteuert.
- $A(t)$ und $\phi_n(t)$ haben komplizierte Statistiken.

Geht man dagegen von Gl.(2.7a) für das verrauschte Eingangssignal aus und multipliziert mit u_2 , so ergibt sich mit der konstanten Diskriminatorsteigung

$$K_D = \frac{1}{2} \dot{u}_1 \dot{u}_2 \quad (2.13)$$

für u_0 die Darstellung (wieder ohne die hochfrequenten Störanteile)

$$(2.14a)$$

$$u_0(t, \varphi) = K_D [\sin \varphi + \frac{1}{\dot{u}_1} n_c \cos \phi_2(t) + \frac{1}{\dot{u}_1} n_s \sin \phi_2(t)]$$

$$= K_D [\sin \varphi + n'(t)] \quad (2.14b)$$

von der alle bekannten Berechnungsverfahren ausgehen.

Hierbei wird der Einfluß der nichtlinearen Operation (Multiplikation) auf $n(t)$ durch eine Modifikation in dimensionsloses, ins Basisband abgemischtes Phasenrauschen $n'(t)$ mit bekannten, relativ einfachen statistischen Eigenschaften (s.unten) berücksichtigt. Außerdem wird die sinusförmige Kennlinie

$$g(\varphi) = \sin \varphi \quad (2.15)$$

jetzt nur vom Phasenfehler φ nach Gl.(2.12) angesteuert.

Gl.(2.14) ist demnach Grundlage der weiteren Berechnungen.

Aus der Faltungsbeziehung zwischen Kreisfilter-Eingang und -Ausgang (Impulsantwort $f(t)$)

$$u_3(t) = \int_0^t u_0(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (2.16)$$

und mit der VCO-Steuerkennlinie (s.Gl.2.6 und 2.10)

$$\Omega_{VCO} = \Omega_{20} + K_O u_3 = \Omega_{20} + d\phi_2/dt \quad (2.17)$$

ergibt sich im niederfrequenten Bereich (Basisband):

$$\frac{d\phi_2}{dt} = K_O K_D \int_0^t [\sin\varphi(\tau) + n'(\tau)] f(t-\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Mit der Definition der statischen Regelsteilheit ω_s

$$\omega_s = K_O K_D \quad (2.19)$$

erhält man daraus schließlich die stochastische nichtlineare Differentialgleichung des gestörten Phasenregelkreises für den Phasenfehler φ , der die Phasenabweichung des regenerierten PLL-Ausgangssignals vom Sendesignal beschreibt und daher zur Charakterisierung des Störverhaltens besonders geeignet ist:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} - \omega_s \int_0^t [\sin\varphi(\tau) + n'(\tau)] f(t-\tau) d\tau \quad (2.20)$$

Daraus folgt sofort das nichtlineare Ersatzmodell für den gestörten PLL mit Sinus-Phasendiskriminator ohne Begrenzer (Bild 2.4).

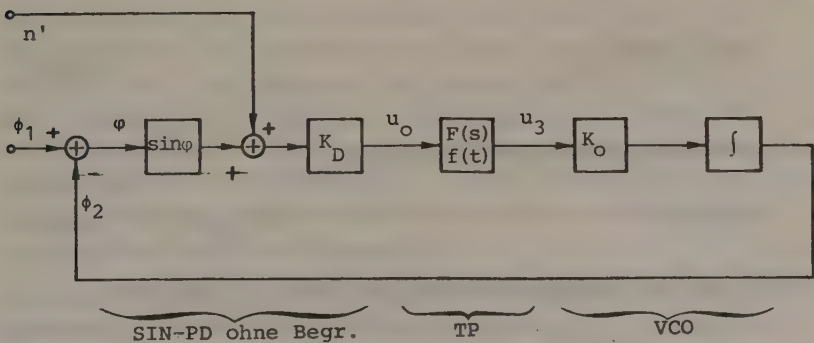


Bild 2.4 Nichtlineares Ersatzmodell für den gestörten PLL mit Sinus-PD ohne Begrenzer

Für explizite statistische Berechnungen an diesem Modell ist zunächst die nichtlineare Kennlinie in Abhängigkeit vom Phasenfehler, hier

$$g(\varphi) = \sin \varphi \quad (2.21)$$

von Bedeutung. Ferner muß die Statistik des äquivalenten Basisband-Phasenrauschens $n'(t)$, insbesondere seine Leistung $\overline{n'^2}$ und Bandbreite B'_1 bekannt sein. In der Literatur wird gezeigt [7,8,10], daß eine einfache statistische Charakterisierung von $n'(t)$ nur dann möglich ist, wenn die HF-Bandbreite B_1 wesentlich größer ist als die doppelte Rauschbandbreite $2f_R$ des PLL. Diese Bedingung ist in der Praxis meist erfüllt, da die störbefreiende Wirkung des Phasenregelkreises gerade durch eine Einengung der PLL-Bandbreite erreicht wird. Unter dieser Voraussetzung kann man mit Hilfe der Gleichungen (2.14a) und (2.14b) zeigen [7,8], daß $n'(t)$ die gleichen statistischen Eigenschaften wie die Normal- und Quadraturkomponenten $n_S(t)$ und $n_C(t)$ des Schmalbandrauschens $n(t)$ in Gl. (2.2) hat. Für die weiteren Berechnungen kann das äquivalente Phasenrauschen $n'(t)$ demnach gut als mittelwertfreies, innerhalb der PLL-Bandbreite "weißes" Rauschen mit Gaußverteilung, der Leistung

$$\overline{n'^2(t)} = \frac{\overline{n^2}}{\hat{u}_1^2}, \quad (2.22)$$

der (zweiseitigen Tiefpaß-) Bandbreite

$$B'_1 = B_1 \quad |f| < B_1/2 \quad (2.23)$$

und mit dem Leistungsdichtespektrum (s. Gl. 2.3 und 2.4)

$$S_{n'}(\omega) = N'_O = \frac{\overline{n'^2}}{B'_1} = \frac{\overline{n^2}}{B_1 \hat{u}_1^2} = \frac{N_O}{\hat{u}_1^2} \quad |\omega| < 2\pi B_1/2 \quad (2.24)$$

angenähert werden.

2.3 Das "Wellblechmodell"

Die dynamischen Eigenschaften des gestörten PLL bezüglich des Phasenfehlers können für den filterlosen Regelkreis $[F(s)=1]$ vorteilhaft durch ein mechanisches Analogon, das sogenannte "Wellblechmodell", veranschaulicht werden[11].

Für eine konstante Frequenzverstimmung $\Delta\Omega$ zwischen Referenzfrequenz und VCO-Ruhefrequenz

$$\Delta\Omega = d\phi_1/dt = \text{const} \quad (2.25)$$

kann die Systemgleichung (2.20) 1. Ordnung (filterloser Kreis) als Bewegungsgleichung eines Massenpunktes in einem nichtlinear vom "Weg" φ abhängigen Kraftfeld F mit dem Wert $\Delta\Omega - \omega_s n' - \omega_s \sin \varphi$ interpretiert werden. Das Potential U des Feldes ist dann (es gilt: $U = -\int F(\varphi) d\varphi$):

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= - \int (\Delta\Omega - \omega_s n' - \omega_s \sin \varphi) d\varphi \\ &= (\omega_s n' - \Delta\Omega) \varphi - \omega_s \cos \varphi + U_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dieses Potential hat dieselbe Form wie das Potential eines Massenpunktes, der sich im Gravitationsfeld der Erde auf einer cosinusförmig gewellten schrägen Oberfläche bewegt (s. Bild 2.5). Das Rauschen am Eingang hat eine statistische Schwankung der Neigung der Oberfläche zur Folge. Die Zeitabhängigkeit von $\varphi(t)$ wird deutlich, wenn man sich den Massenpunkt als Kugel vorstellt, die mit in Richtung der t -Achse konstanter Geschwindigkeitskomponente auf dem wellblechartigen Profil entlangrollt.

Aus dieser Modellvorstellung wird z.B. das Auftreten von stabilen Lagen des Phasenfehlers im Abstand von 2π zwischen den Potentialwällen deutlich. Ebenso erkennt man, daß bei größeren Rauschstörungen Übergänge von φ in benachbarte

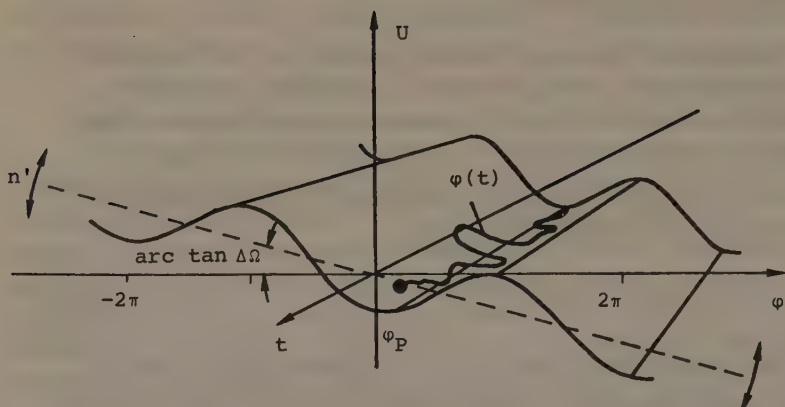


Bild 2.5 Das "Wellblechmodell" zur Veranschaulichung des Systemverhaltens

stabile Lagen möglich sind, die beim PLL als 2π -Phasensprünge bekannt sind (s. Abschn. 4.2). Weiterhin erlaubt das Modell sofort die Bestimmung des statischen Phasenfehlers φ_P für $n'=0$ in Abhängigkeit von der Verstimmung $\Delta\Omega$ aus dem relativen Minimum von U zu:

$$\varphi_P = \arcsin(\Delta\Omega/\omega_s) \quad (2.27)$$

oder die Berechnung des Haltebereiches $\Delta\Omega_H = \pm \omega_s$ (s. Abschn. 4.3) für $n'=0$ als Verstimmung, für die kein relatives Minimum mehr auftritt.

2.4 Eigenschaften des linearisierten Systems

Eine Reihe von Parametern zur Kennzeichnung von Phasenregelkreisen sind aus dem linearisierten System abgeleitet, das durch das Modell Bild 2.4 bei Linearisierung der sinusförmigen Kennlinie gemäß $\sin \varphi = \varphi$ beschrieben wird.

Das lineare Modell kann dann mit Hilfe von Übertragungsfunktionen im Laplace-Bereich dargestellt werden. Aus der Übertragungsfunktion $G_O(s)$ der offenen Schleife (s.Bild 2.4)

$$G_O(s) = \omega_s F(s)/s \quad (2.28)$$

ergibt sich die Phasenübertragungsfunktion $G(s)$ des geschlossenen Kreises

$$G(s) = \frac{\phi_2(s)}{\phi_1(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} \quad (2.29)$$

Beide Übertragungsfunktionen werden in Tab.2.1 explizit für die behandelten Kreisfilter dargestellt, ebenso wie die Parameter: Dämpfungsfaktor D , Kreisverstärkung K und Eigenfrequenz ω_O , die für die Regelkreise 2. Ordnung (mit Kreisfilter 1. Grades) definiert sind.

Das lineare Modell dient in guter Näherung auch zur Beschreibung des Störverhaltens im Bereich schwacher Störungen. Die dabei abgeleiteten Kenngrößen sind die äquivalente PLL-Rauschbandbreite f_R

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.30)$$

und die normierte Rauschleistung $1/\alpha$ [z.B.7,8]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) d\omega = \\ &= \frac{n^2}{\alpha_1^2 B_1} \cdot 2f_R = \frac{1}{(\text{SNR})_1} \frac{f_R}{B_1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

	$F(s)=1$	pass.PI-Glied	akt.PI-Glied
$G_O(s)$	$\frac{\omega_s}{s}$	$\frac{\omega_s}{s} \frac{1+sT}{1+sT/m}$	$m\omega_s \frac{1+sT}{s^2 T}$
$G(s)$	$\frac{\omega_s}{s+\omega_E}$	$\frac{1+sT}{1+sT(1+\frac{1}{\omega_s T})+s^2 \frac{T}{m\omega_s}}$	$\frac{1+sT}{1+sT+s^2 \frac{T}{m\omega_s}}$ $\frac{2D\omega_O s+\omega_O^2}{s^2+2D\omega_O s+\omega_O^2}$
K	-	$m\omega_s T$	$m\omega_s T$
ω_O	-	$\sqrt{\frac{m\omega_s}{T}}$	$\sqrt{\frac{m\omega_s}{T}} = \frac{1}{T}\sqrt{K} = \frac{2D}{T}$
D	-	$\frac{1}{2}\sqrt{K}(1+\frac{1}{\omega_s T})$	$\frac{\omega_O T}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{K}$
f_R	$\frac{\omega_s}{4}$	$\frac{\omega_s}{4} \frac{1+K}{1+\omega_s T}$	$\frac{1+K}{4T} = \omega_O \frac{1+4D^2}{8D}$
$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{N_O \omega_s}{2\hat{u}_1^2}$	$\frac{N_O \omega_s}{2\hat{u}_1^2} \frac{1+K}{1+\omega_s T}$	$\frac{N_O (1+K)}{2\hat{u}_1^2 T}$

Tab.2.1 Definition der Parameter von linearisierten Phasenregelkreisen mit verschiedenen Kreisfiltern

In Gl.(2.31) wurde die Definition des HF-Störabstandes am PLL-Eingang (s.Bild 2.1) verwendet:

$$(\text{SNR})_1 = \frac{\hat{u}_1^2}{2n^2} = \frac{\hat{u}_1^2}{2B_1 N_o} \quad (2.32)$$

Die Definition der normierten Rauschleistung nach Gl.(2.31) und ihre Bezeichnung mit $1/\alpha$ ist in der Literatur üblich. Sie ergibt sich aus der Berechnung der Varianz σ_ϕ^2 des Phasenfehlers mit Hilfe des linearisierten Modells und den Übertragungsfunktionen. Die Rauschkenngößen f_R und $1/\alpha$ wurden ebenfalls in Tab. 2.1 für die verschiedenen Kreisfilter berechnet.

3. ENTWICKLUNG EINES NICHTLINEAREN ERSATZMODELLS FÜR DEN GESTÖRTEN PLL MIT BEGRENZER-PHASENDISKRIMINATOR

Im unverrauschten Fall ist das nichtlineare Modell entsprechend Bild 2.4 mit $n'=0$ ohne weiteres - einfach indem $\sin \varphi$ durch die vorliegende Kennlinie $g(\varphi)$ ersetzt wird - auf allgemeine, mit oder ohne Begrenzung realisierte Diskriminator-kennlinien übertragbar und wird beispielsweise zur Berechnung des Fangbereichs [z.B.35] angewendet. Dieselbe Substitution ist bei verrauschten Signalen jedoch nur zulässig, wenn die betreffende Kennlinie ohne Begrenzer durch Analog-multiplizierer realisiert ist. Da aber Dreieck- und Sägezahn-Diskriminatoren praktisch immer mit Begrenzern aufgebaut sind (vergl. Abschn. 2.1), ist dieses in der Literatur [z.B.7,23] verschiedentlich zur Behandlung allgemeiner nichtlinearer Kennlinien vorgeschlagene Verfahren bei verrauschten Signalen nur von theoretischer Bedeutung.

Der Grund liegt darin, daß die Gl.(2.14) nicht ohne weiteres verallgemeinert werden kann, da bei der Herleitung eine multiplikative Verknüpfung der beiden nicht amplitudenbegrenzten Diskriminator-Eingangssignale vorausgesetzt wurde. Der dreieck- bzw. sägezahnförmige nichtlineare Zusammenhang gilt bei den Begrenzer-Diskriminatoren für $n \neq 0$ nämlich nur für die *Phasendifferenz* $\phi_1 + \phi_n - \phi_2$ der Eingangssignale, nicht aber für die Abhängigkeit vom *Phasenfehler* φ , die zunächst gar nicht angegeben werden kann. Ebenso ist die additive Einspeisung des äquivalenten Phasenrauschens n' mit den einfachen statistischen Eigenschaften auf die speziellen Voraussetzungen von Abschnitt 2.2 beschränkt.

Im folgenden Kapitel wird deshalb zunächst für Phasendiskriminatoren mit *beliebiger*, ungerader und periodischer Kennlinie und *einschließlich* einer Amplitudenbegrenzung eine allgemeine Beschreibung gesucht, die die beiden nichtlinearen Elemente, nämlich Begrenzer und nichtline-

are Phasenkennlinie umfaßt. Daraus wird für den gestörten Phasenregelkreis ein allgemeines, nichtlineares Ersatzmodell entwickelt, das als Sonderfall auch den bekannten, in Abschnitt 2.2 beschriebenen Ansatz für den Sinus-Phasendiskriminator ohne Begrenzer einschließt.

3.1 Allgemeine Beschreibung gestörter Phasendiskriminatoren

Die Ausgangsspannung u_o eines Begrenzer-Diskriminators ist, unabhängig von der Amplitude der Eingangssignale (u_1+n) nach Gl. (2.7c) und u_2 nach Gl. (2.10), als nichtlineare Funktion g der Phasendifferenz dieser Signale entsprechend der realisierten Kennlinie (sinus-, dreieck-, sägezahnförmig) gegeben:

$$u_o(t, \varphi) = K_D g[\varphi + \phi_n(t)] \quad (3.1)$$

Für die Aufstellung eines Ersatzmodells wird nun angestrebt, die Vorteile einer Beschreibung von u_o entsprechend Gl. (2.14b) zu nutzen. Dies sind im wesentlichen die Abhängigkeit der Nichtlinearität nur vom Phasenfehler φ und die Möglichkeit, die für das Modell nach Abschnitt 2.2 vorhandenen Berechnungsverfahren weitgehend übernehmen zu können.

Es wird also für u_o eine Darstellung entsprechend dem Ansatz

$$u_o(t, \varphi) = K_D [g'(\varphi) + n'(t)] \quad (3.2)$$

gesucht, bei der eine m o d i f i z i e r t e Modellkennlinie $g'(\varphi)$ nur vom Phasenfehler angesteuert wird, und die Rauscheinpeisung als äquivalentes Phasenrauschen n' - mit jeweils von der vorliegenden Diskriminator-Realisierung abhängiger Statistik - additiv hinter der Nichtlinearität erfolgt.

Die Aufspaltung von u_o in eine Summe aus den Anteilen wie in Gl. (3.2) ist dann sinnvoll, wenn die HF-Bandbreite B_1 deutlich größer als die PLL-Rauschbandbreite f_R ist. Das Diskri-

minator-Ausgangssignal enthält dann den nichtlinear vom niederfrequenten (im wesentlichen Bandbreite f_R) Phasenfehler φ abhängigen Nutzanteil $g'(\varphi)$ (Regelkennlinie), der nach Filterung im Kreistiefpaß den VCO nachstimmt, und einen breitbandigen Störterm $n'(t)$ entsprechend der Bandbreite B_1 der am Phasendiskriminator-Eingang anliegenden Störung $n(t)$. Gemäß der Voraussetzung $B_1 \gg f_R$ ist dann die Berechnung von $g'(\varphi)$ und $n'(t)$ möglich bei Vernachlässigung der Korrelation zwischen beiden Prozessen.

Aus dem Vergleich der Gleichungen (3.1) und (3.2) erhält man den Ansatz:

$$g[\varphi + \phi_n(t)] \stackrel{!}{=} g'(\varphi) + n'(t) \quad (3.3)$$

Da sich wegen $B_1 \ll f_R$ der Phasenfehler φ zeitlich wesentlich langsamer verändert als das breitbandige Eingangssphasenrauschen ϕ_n , erhält man den niederfrequenten Anteil $g'(\varphi)$ in u_0 aus einer Mittelwertbildung über ϕ_n bei festem φ :

$$g'(\varphi) = \overline{g(\varphi + \phi_n)} | \varphi \quad (3.4)$$

Der schnell veränderliche Störterm $n'(t)$ ergibt sich aus Gl.(3.3) für $g'(\varphi) = 0$ und - wegen $g'(\varphi = 0) = 0$ - für $\varphi = 0$:

$$n'(t) = g(\phi_n) \quad (3.5)$$

Das äquivalente Eingangssphasenrauschen $n'(t)$ wird vor allem charakterisiert durch die Leistung $\overline{n'^2}$ und die Rauschbandbreite B_1' , womit seine Rauschleistungsdichte N'_0 bestimmt werden kann.

Bevor im folgenden die modifizierten Kennlinien und das Phasenrauschen n' für die Begrenzer-Diskriminatoren mit den verschiedenen Kennlinien im einzelnen berechnet werden, sei die Gültigkeit der Definitionsgleichungen (3.4) und (3.5) am

Beispiel des bereits dargestellten Falles gezeigt. In Abschnitt 2.2 ergab sich für den Phasendiskriminator mit Sinuskennlinie ohne Begrenzer aus der direkten Berechnung (Gl.2.15) die Modellkennlinie $g'(\varphi) = g(\varphi) = \sin \varphi$ und ein äquivalentes Phasenrauschen mit Leistung $\overline{n'^2}$ und Bandbreite B'_1 gemäß Gl.(2.22) und Gl.(2.23).

Der Vergleich von $u_o(t, \varphi)$ in der Darstellung entsprechend Gl.(2.11b) mit dem allgemeinen Ansatz Gl.(3.3) liefert ($K_D = \hat{u}_1 \hat{u}_2 / 2$):

$$u_o = K_D \frac{A(t)}{\hat{u}_1} \sin(\varphi + \phi_n) \stackrel{!}{=} K_D [g'(\varphi) + n'(t)] \quad (3.6)$$

Nach der Definitionsgleichung (3.4) ergibt sich daraus für den Nutzanteil:

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= \frac{1}{\hat{u}_1} \overline{A(t) \sin(\varphi + \phi_n)} | \varphi \\ &= \frac{1}{\hat{u}_1} [\overline{A(t) \cos \phi_n} \sin \varphi + \overline{A(t) \sin \phi_n} \cos \varphi] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Weiterhin gilt nach Gl.(2.7b) und (2.7c):

$$A(t) \cos \phi_n = \hat{u}_1 - N_s(t) \quad (3.8a)$$

$$A(t) \sin \phi_n = N_c(t) \quad (3.8b)$$

Damit wird auch nach dieser allgemeinen Herleitung

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= \frac{1}{\hat{u}_1} [(\hat{u}_1 - \overline{N_s(t)}) \sin \varphi + \overline{N_c(t)} \cos \varphi] \\ &= \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

da N_s und N_c ebenso wie n_s und n_c und $n(t)$ selbst mittelfreie sind [z.B.7].

Für den Rauschanteil gilt nach Gl. (2.11b) und der Definitionsgleichung (3.5):

$$n'(t) = \frac{1}{\hat{a}_1} A(t) \sin \phi_n = \frac{N_c(t)}{\hat{a}_1} \quad (3.10)$$

Man kann nun zeigen [7], daß die Quadraturkomponente $N_c(t)$ des Schmalbandrauschens nach Gl. (2.2b) die gleiche Leistung $\overline{n^2}$ und Rauschbandbreite B_1 hat wie die Komponenten n_c und n_s in Gl. (2.2a), wenn die Voraussetzung $B_1 \gg f_R$ erfüllt ist, die sowohl der direkten Rechnung in Abschnitt 2.2 wie auch der Herleitung der Definitionsgleichung (3.5) zugrunde liegt. Mit Gl. (3.10) bestätigt man also auch auf diese Weise die Beziehungen (2.22) bis (2.24) für das äquivalente Phasenrauschen $n'(t)$.

Die für allgemeine Phasendiskriminatoren abgeleiteten Definitionsgleichungen (3.4) und (3.5) beschreiben damit - unter der jeweils gleichen Voraussetzung $B_1 \gg f_R$ - auch das in Abschnitt 2.2 behandelte bekannte Modell.

3.2 Die Berechnung der Modellkennlinien

Für die drei im Rahmen der Arbeit untersuchten nichtlinearen Charakteristiken von Begrenzer-Diskriminatoren werden im folgenden jeweils die modifizierten Modellkennlinien $g'(\varphi)$ berechnet.

Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie:

Wegen der hier sinusförmigen Abhängigkeit der Diskriminator-Ausgangsspannung von der Eingangsphasendifferenz wird Gl. (3.4)

$$g'(\varphi) = \overline{\sin(\varphi + \phi_n)} \mid \varphi = \overline{\cos \phi_n} \sin \varphi, \quad (3.11)$$

wobei die Mittelwertfreiheit von ϕ_n bzw. $\sin \phi_n$ ausgenutzt wurde.

Der Erwartungswert $\overline{\cos \phi_n}$ wird berechnet aus:

$$\overline{\cos \phi_n} = E\{\cos \phi_n\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos \phi_n p(\phi_n) d\phi_n \quad (3.12)$$

Dabei ist $p(\phi_n)$ die Verteilungsdichte der Störphase des verrauschten Eingangssignals (s. Anhang A1). $p(\phi_n)$ läßt sich in Integralform als Randverteilung der Verbundverteilungsdichte von Einhüllender A ($0 \leq A < \infty$) und Phase ϕ_n ($-\pi \leq \phi_n \leq \pi$) darstellen [6,15].

$$\begin{aligned} p(\phi_n) &= \int_0^{\infty} p(A, \phi_n) dA = \\ &= \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{\infty} A \cdot \exp \left[-\frac{1}{2n^2} (A^2 + a_1^2 - 2a_1 A \cos \phi_n) \right] dA \end{aligned} \quad (3.13)$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt die Integration entsprechend Gl. (3.12) (s. Anhang A1; I_ν ist die modifizierte Besselfunktion ν -ter Ordnung):

$$\overline{\cos \phi_n} = \mu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi (\text{SNR})_1} e^{-\frac{(\text{SNR})_1}{2}} \left\{ I_0 \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] + I_1 \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \right\} \quad (3.14)$$

Dabei wurde die Definition Gl. (2.32) des Eingangs-HF-Störabstandes verwendet. Die Modellkennlinie $g'(\varphi)$ ist hier also sinusförmig mit der von $(\text{SNR})_1$ abhängigen Amplitude μ_1 (s. Bild 3.1 und 3.2)

$$g'(\varphi) = \mu_1 \sin \varphi \quad (3.15)$$

Die Beziehung Gl. (3.14) wird in der Literatur [12,13,14,46] im Zusammenhang mit der Behandlung des Störabstandes von Bandpaß-Begrenzern [Anordnung bestehend aus hartem Begrenzer

und anschließender Bandpaßfilterung derart, daß nur spektrale Anteile in der Nähe der Grundwelle des hart begrenzten Signals (1.Zone) berücksichtigt werden] als Signal-Unterdrückungsfaktor μ_1 der 1.Zone bezeichnet. Entsprechend kann $g'(\varphi)$ als Signalanteil nach Bandpaßbegrenzung und kohärenter Demodulation (Multiplikation, s. Bild 2.2a) betrachtet werden.

Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie:

Während beim oben behandelten Sinus-Begrenzer-Diskriminator sowohl die modifizierte Modellkennlinie $g'(\varphi)$ als auch die nichtlineare Abhängigkeit von der Eingangsphasendifferenz $g(\varphi + \phi_n)$ sinusförmig sind, ist hier - wie sich zeigen wird - nur die Kennlinie $g(\varphi + \phi_n)$ dreieckförmig, nicht dagegen die Modellkennlinie $g'(\varphi)$.

Zur Berechnung von $g'(\varphi)$ wird die periodische Dreieckkennlinie $g(\varphi + \phi_n)$ zunächst in eine Fourierreihe entwickelt:

$$g(\varphi + \phi_n) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k^2} \sin k(\varphi + \phi_n) \quad (3.16)$$

Nach trigonometrischer Umformung und Mittelung gemäß Gl.(3.4) ergibt sich für $g'(\varphi)$ die Reihe

$$g'(\varphi) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k^2} \overline{\cos k\phi_n} \sin k\varphi. \quad (3.17)$$

Mit $p(\phi_n)$ nach Gl.(3.13) liefert die Integration (s. Anhang A1) zur Berechnung des Erwartungswertes entsprechend Gl.(3.12)

$$\overline{\cos k\phi_n} = \mu_k = \frac{1}{2} \sqrt{\pi(\text{SNR})} e^{-\frac{(\text{SNR})}{2}} \left\{ I_{\frac{k-1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})}{2} \right] + I_{\frac{k+1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})}{2} \right] \right\} \quad (3.18)$$

Die Koeffizienten μ_k werden als Signal-Unterdrückungsfaktoren der Zonen $k=1,3,5\dots$ bezeichnet (s. Bild 3.1).

Man erhält damit die nichtlineare Modellkennlinie $g'(\varphi)$ für den Dreieck-Phasendiskriminator in Form der Reihe

$$g'(\varphi) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{k^2} \mu_k \sin k\varphi, \quad (3.19)$$

die als Funktion vom HF-Störabstand in Bild 3.2 dargestellt ist.

Für große $(\text{SNR})_1$ streben die μ_k gegen Eins, und $g'(\varphi)$ wird praktisch dreieckförmig. Mit abnehmendem Störabstand $(\text{SNR})_1$ werden die Fourierkoeffizienten $1/k^2$ mit den jeweiligen Werten μ_k gewichtet. Im Bereich sehr kleiner $(\text{SNR})_1$ gilt $\mu_k \approx 0$ für $k > 1$ und $g'(\varphi)$ wird dann nahezu sinusförmig (s. Bild 3.2).

Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie:

Die Fourierdarstellung der Sägezahnkennlinie lautet

$$g(\varphi + \phi_n) = 2 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{1}{v} \sin v(\varphi + \phi_n). \quad (3.20)$$

Nach der Definitionsgleichung (3.4) für $g'(\varphi)$ erhält man daraus nach Mittelung über ϕ_n bei festem φ

$$g'(\varphi) = 2 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} (-1)^{v+1} \frac{1}{v} \overline{\cos v\phi_n} \sin v\varphi \quad (3.21)$$

mit den Signal-Unterdrückungsfaktoren (s. Anhang A1)

$$\overline{\cos v\phi_n} = \mu_v = \frac{1}{2} \sqrt{\pi (\text{SNR})_1} e^{-\frac{(\text{SNR})_1}{2}} \left\{ I_{v-1} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] + I_{v+1} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \right\}. \quad (3.22)$$

Wegen $\nu=1,2,3,\dots$ sind dabei auch modifizierte Besselfunktionen gebrochener Ordnung enthalten. Die μ_ν sind bis zur Ordnung $\nu=7$ als Funktion von $(\text{SNR})_1$ in Bild 3.1 dargestellt.

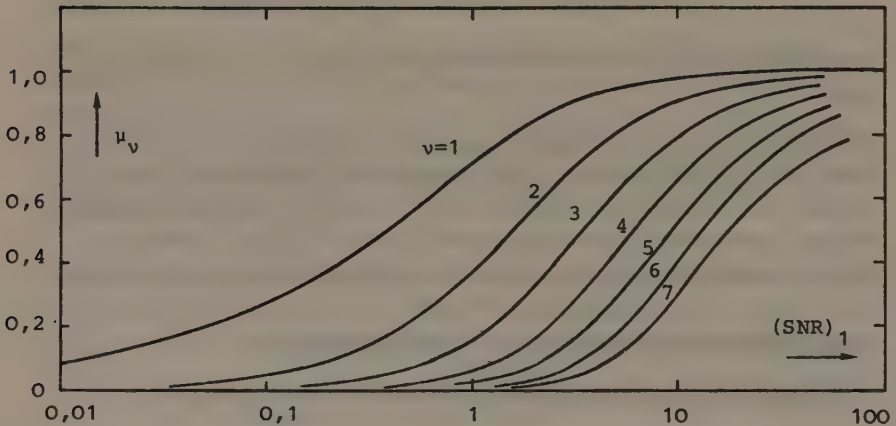


Bild 3.1 Signal-Unterdrückungsfaktoren

Damit ergibt sich die Modellkennlinie des Begrenzer-Diskriminators mit Sägezahncharakteristik

$$g'(\varphi) = 2 \sum_{\nu=1,2,3}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu} \mu_\nu \sin \nu \varphi, \quad (3.23)$$

die in Bild 3.2 grafisch dargestellt ist.

Für sehr kleine $(\text{SNR})_1$ wird auch hier $g'(\varphi)$ sinusförmig. Im Vergleich zur Modellkennlinie des Dreieck-Phasendiskriminators sind die Verzerrungen gegenüber einem reinen Sinus bei gleichem $(\text{SNR})_1$ allerdings wesentlich größer.

3.3 Die Berechnung der Leistung des äquivalenten Phasenrauschens

Ebenso wie die Modellkennlinien $g'(\varphi)$ ist die Leistung des Phasenrauschens $n'(t)$ am Diskriminatorausgang vom HF-Störabstand $(\text{SNR})_1$ abhängig. $\overline{n'^2}$ wird im folgenden für die einzelnen Diskriminator-Charakteristiken berechnet.

Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie:

Für den Störanteil $n'(t)$ am Diskriminatorausgang gilt hier nach der Definition (Gl.3.5):

$$n'(t) = g(\phi_n) = \sin \phi_n$$

Die Leistung bzw. der quadratische Mittelwert ergibt sich aus

$$\overline{n'^2} = \overline{\sin^2 \phi_n} = E\{\sin^2 \phi_n\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \phi_n p(\phi_n) d\phi_n \quad (3.24)$$

mit der in $[-\pi, +\pi]$ definierten Verteilungsdichte $p(\phi_n)$ der Störphase. Nach Umformung erhält man als Ergebnis der Integration (s. Anhang A2) die einfache Beziehung

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2(\text{SNR})_1} (1 - e^{-(\text{SNR})_1}). \quad (3.25)$$

Die asymptotischen Grenzwerte sind

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow 0 \quad (3.26a)$$

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2(\text{SNR})_1} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow \infty. \quad (3.26b)$$

Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie:

Gemäß dem dreieckförmigen, also stückweise linearen Zusammenhang $g(\varphi + \phi_n)$ gilt hier im Bereich $[-\pi, +\pi]$

$$n'(t) = g(\phi_n) = \begin{cases} -\phi_n - \pi & -\pi \leq \phi_n < -\pi/2 \\ \phi_n & -\pi/2 \leq \phi_n \leq \pi/2 \\ -\phi_n + \pi & \pi/2 \leq \phi_n \leq \pi \end{cases} \quad (3.27)$$

Entsprechend wird zur Berechnung der Leistung das Integral

$$\overline{n'^2} = \overline{g^2(\phi_n)} = E\{g^2(\phi_n)\} = \int_{-\pi}^{+\pi} g^2(\phi_n) p(\phi_n) d\phi_n \quad (3.28)$$

abschnittsweise in den drei linearen Bereichen der Diskriminatorkennlinie im Intervall $[-\pi, +\pi]$ ausgewertet.

Die Einzelheiten der Rechnung sind im Anhang A3 aufgeführt. Hier sei nur soviel erwähnt, daß zunächst durch Variablensubstitution und durch Berücksichtigung von Symmetrien der Integrationsbereich eingeschränkt wird:

$$\overline{n'^2} = 2 \int_0^{\pi/2} \phi_n^2 [p(\phi_n) + p(\phi_n - \pi)] d\phi_n \quad (3.29)$$

Dieses bestimmte Integral kann nun mit $p(\phi_n)$ nach Gl.(3.13), mit einer Reihenentwicklung für $\exp(\pm a \cos x)$ in Besselfunktionen (Anger-Jacobi-Formel [16]) und mit der Beziehung Gl.(A1.7) von Anhang A1 als Summe von modifizierten Besselfunktionen gebrochener Ordnung dargestellt werden:

$$\overline{n'^2} = \frac{\pi^2}{12} + 2\sqrt{\pi(\text{SNR})_1} e^{-\frac{(\text{SNR})_1}{2}} \cdot \sum_{l=2,4,6}^{\infty} (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{1}{l^2} \left\{ I_{\frac{l-1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] + I_{\frac{l+1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \right\} \quad (3.30)$$

Der Ausdruck in der unendlichen Summe hat die gleiche Form wie die in Abschnitt 3.2 berechneten Signal-Unterdrückungsfaktoren (Gl.3.22). Man kann daher abkürzen

$$\overline{n'^2} = \frac{\pi^2}{12} + 4 \cdot \sum_{l=2,4,6}^{\infty} (-1)^{\frac{l}{2}} \frac{1}{l^2} \mu_l \quad (3.31)$$

und auch $\overline{n'^2}$ einheitlich wie $g'(\varphi)$ mit Hilfe der Signal-Unterdrückungsfaktoren beschreiben.

Die asymptotischen Werte

$$\overline{n'^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow 0 \quad (3.32a)$$

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2(\text{SNR})_1} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow \infty \quad (3.32b)$$

ergeben sich bei Berücksichtigung des Grenzverhaltens der modifizierten Besselfunktionen [16].

Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie:

Wegen der im Bereich $[-\pi, +\pi]$ linearen Sägezahnkennlinie $g(\varphi + \phi_n)$ gilt:

$$n'(t) = g(\phi_n) = \phi_n \quad -\pi \leq \phi_n \leq +\pi \quad (3.33)$$

Entsprechend ist das Integral

$$\overline{n'^2} = \overline{g^2(\phi_n)} = E\{\phi_n^2\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \phi_n^2 p(\phi_n) d\phi_n \quad (3.34)$$

auszuwerten (s. Anhang A3). Das Ergebnis kann wiederum mit Hilfe von Signal-Unterdrückungsfaktoren dargestellt werden

$$\overline{n'^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} (-1)^v \frac{1}{v^2} \mu_v \quad (3.35)$$

Dabei sind die Grenzwerte:

$$\overline{n'^2} = \frac{\pi^2}{3} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow 0 \quad (3.36a)$$

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2(\text{SNR})_1} \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow \infty \quad (3.36b)$$

3.4 Die Berechnung der Rauschbandbreite des äquivalenten Phasenrauschens

Zur Berechnung der Rauschbandbreite B'_1 wird wie in der Literatur bei der Behandlung des Störabstandes von Bandpaß-Begrenzern vorgegangen. In [13] wird die Bandbreite des Störanteils in der Umgebung der Grundwelle des rechteckförmigen Begrenzer Ausgangssignals bestimmt. Dazu werden die asymptotischen Werte der Bandbreite für sehr kleine und sehr große Eingangs-Störabstände $(\text{SNR})_1$ exakt analytisch berechnet. Der übrige Verlauf in Abhängigkeit von $(\text{SNR})_1$ wird in [13] durch einen empirisch ermittelten geschlossenen Ausdruck approximiert.

Entsprechend wird hier bei der Berechnung von B'_1 verfahren. Die asymptotischen Grenzwerte werden analytisch berechnet und der Übergang zwischen den Asymptoten wird durch Meßwerte gesichert und danach analytisch approximiert. Dieses Verfahren ist hier auch deswegen gerechtfertigt, weil die Bandbreite B'_1 des Phasenrauschens $n'(t)$ nur schwach von $(\text{SNR})_1$ abhängig ist und sich nicht wesentlich von B_1 unterscheidet (s. unten).

Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie:

In [13] wird gezeigt, daß - unter den gleichen Voraussetzungen eines verrauschten Eingangssignals wie in der vorliegenden Arbeit - für die Bandbreite B'_1 des um die Grundfrequenz konzentrierten Rauschanteils (1.Zone) am Begrenzerausgang folgendes gilt:

- Für $(\text{SNR})_1 \rightarrow \infty$ ist B'_1 gleich der Bandbreite B_1 des Eingangsruschens $n(t)$.
- Für $(\text{SNR})_1 \rightarrow 0$ gelten prinzipiell folgende untere und obere Schranken:

$$B_1 < B'_1 < \frac{4}{\pi} B_1 \quad (3.37)$$

Speziell für eine ideale Rechteckübertragungsfunktion des HF-Vorfilters wird berechnet:

$$B'_1 [(\text{SNR})_1 \rightarrow 0] = \frac{4}{\pi} \cdot 0,862 B_1 = 1,098 B_1 \quad (3.38)$$

- Für abnehmendes $(\text{SNR})_1$ steigt B'_1 monoton von B_1 bis zum Maximalwert bei $(\text{SNR})_1 = 0$. Für den Übergang liegen numerisch berechnete Ergebnisse vor [18]. Der exponentielle funktionale Zusammenhang [13]

$$B'_1 = B_1 \left[1 + 0,098 e^{-\frac{(\text{SNR})_1 \cdot (1-\pi/4)}{1,098}} \right] \quad (3.39)$$

approximiert diesen Verlauf und hat die oben (für ein Rechteck-HF-Vorfilter) geforderten Grenzwerte.

Da die Multiplikation im Begrenzer-Diskriminator (Bild 2.2b) nach der Bandpaßbegrenzung lediglich eine spektrale Verschiebung der Frequenzanteile der 1.Zone ins Basisband bedeutet, ändert sich die Rauschbandbreite des Störanteils dadurch nicht. Die Bandbreite B_1' des Rauschanteils $n'(t)$ am Diskriminatorausgang wird also näherungsweise ebenfalls durch Gl.(3.39) beschrieben. Das Bild 3.5 zeigt den danach berechneten Verlauf im Vergleich zu Meßwerten, die an einem entsprechenden Diskriminator gewonnen wurden (s. Abschn.5.1).

Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie:

Für die Rauschbandbreite B_1' am Diskriminatorausgang wird hier ebenfalls die empirische Formel Gl.(3.39) wie für den Sinus-Diskriminator verwendet.

Zwar werden beim Diskriminator mit Dreieckkennlinie entsprechend der Realisierung Bild 2.2c zwei Rechtecksignale - nämlich das begrenzte verrauschte Eingangssignal und das VCO-Rechtecksignal - multiplikativ miteinander verknüpft (die digitale Realisierung ist einer Multiplikation äquivalent), so daß sich auch die Störanteile der 3., 5. usw. Zone am Begrenzerausgang ins Basisband verschieben, es wird jedoch angenommen, daß sich dadurch die Bandbreite nicht wesentlich ausweitete, da die Störspektren der höheren Zonen entsprechend den Koeffizienten der Fourierentwicklung der beiden Rechteckfunktionen abklingen. Diese Annahme wurde durch Messungen der Rauschbandbreite am Diskriminatorausgang bestätigt (s.Bild 3.5).

Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie:

Für die Bandbreite B_1' des Phasenrauschens am Ausgang eines Sägezahn-Diskriminators kann auf entsprechende Ergebnisse in der Literatur wie bei der Sinuskennlinie nicht zurückgegrif-

fen werden. Auch Überlegungen wie beim Dreieck-Diskriminator führen nicht zum Ziel.

Es werden deshalb die asymptotischen Werte von B_1' für $(\text{SNR})_1 \rightarrow 0$ und $(\text{SNR})_1 \rightarrow \infty$ berechnet und der Übergang für mittlere $(\text{SNR})_1$ empirisch aus Meßwerten ermittelt.

Nach Gl. (3.33) gilt für das äquivalente Phasenrauschen

$$n'(t) = \phi_n \quad -\pi \leq \phi_n \leq \pi \quad (3.40)$$

Für große Störabstände ($\hat{u}_1 \gg N_s, N_c$) folgt aus der Beziehung (2.9) für ϕ_n (s. auch Abschn. 3.1)

$$B_1'[(\text{SNR})_1 \rightarrow \infty] = B_1 \quad (3.41)$$

Für sehr kleine $(\text{SNR})_1$ ist $u_1(t) \ll n(t)$, so daß praktisch die Rauschbandbreite des Phasenrauschens ϕ_n für den gaußverteilten Schmalbandprozeß $n(t)$ zu bestimmen ist. Eine längere Rechnung (s. Anhang A5) zeigt, daß B_1' grundsätzlich in den Schranken

$$B_1 < B_1' < \frac{2}{3}\pi \cdot B_1 \quad (3.42)$$

liegen muß, abhängig von der Form des Frequenzgangs des HF-Vorfilters. Unter der Annahme einer scharfen Bandbegrenzung (Rechteck HF-Filter) gilt (s. Anhang A5):

$$B_1'[(\text{SNR})_1 \rightarrow 0] = 1,35 B_1 \quad (3.43)$$

Die Abhängigkeit $B_1'[(\text{SNR})_1]$ im Zwischenbereich wird in Übereinstimmung mit den Meßwerten (s. Bild 3.5) durch einen entsprechenden exponentiellen Zusammenhang wie für Sinus- und Dreieck-Diskriminator

$$B_1' = B_1 [1 + 0,35 e^{-\frac{(\text{SNR})_1 (1-\pi/4)}{1}}] \quad (3.44)$$

empirisch approximiert.

3.5 Zusammenfassende Beschreibung des PLL-Ersatzmodells

Die oben abgeleiteten Ausgangskenngrößen der Modellbeschreibung der behandelten Phasendiskriminatoren sind in Tab.3.1 zusammenfassend dargestellt. Zusätzlich sind die aus den Modellkennlinien abgeleiteten Integrale

$$G'(\varphi) = \int^{\varphi} g'(x) dx \quad (3.45)$$

angegeben, die jeweils die Form des "Wellblechprofils" (s.Abschn. 2.3) für die entsprechende Diskriminator-Realisierung kennzeichnen und daher hier als Potentiale der Kennlinien bezeichnet werden. $G'(\varphi)$ spielt bei den folgenden nichtlinearen Berechnungen noch eine wichtige Rolle.

In den Diagrammen der Bilder 3.2 bis 3.5 sind die Kenngrößen des Modells für die interessierenden Kennlinien dargestellt. Für die numerische Auswertung wurden entsprechende Rechnerprogramme entworfen.

Anhand der Diagramme sind eine Reihe von Aussagen über die Eigenschaften der Modelldarstellungen der einzelnen Diskriminator-Realisierungen möglich:

Die modifizierten Nichtlinearitäten $g'(\varphi)$ nähern sich alle mit abnehmendem HF-Störabstand $(SNR)_1$ einem sinusförmigen Verlauf an. Bei den Begrenzer-Diskriminatoren verringern sich zusätzlich die Steigungen und die Amplituden.

Entsprechend verhalten sich die Potentiale $G'(\varphi)$. Insbesondere verkleinern sich bei den Begrenzer-Diskriminatoren die Potentialwälle mit abnehmendem Störabstand.

Die Rauschleistung $\overline{n'^2}$ wächst beim Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer nach Gl.(2.22) und (2.32) über alle Grenzen, wenn $(SNR)_1$ gegen Null geht, da hier auch die Amplitude am Ausgang unbegrenzt ist. Bei zusätzlicher Begrenzung nähert sich dagegen $\overline{n'^2}$ für $(SNR)_1 \rightarrow 0$ einem konstanten Wert; der Nutzen-

	Sinus-PD ohne Beg.	Begrenzer-PD Sinuskennlinie	Begrenzer-PD Dreieckkennlinie	Begrenzer-PD Sägezahnkennlinie
$g'(\varphi)$	$\sin \varphi$	$\mu_1 \sin \varphi$	$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}}{k^2} \frac{1}{2} \frac{1}{k^2} \mu_k \sin k\varphi$	$2 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v^{\mu}} \frac{1}{v^{\mu}} \sin v\varphi$
$\frac{n^2}{n^2}$	$\frac{1}{2(SNR)_1}$	$\frac{1}{2(SNR)_1} [1 - e^{-(SNR)_1}]$	$\frac{\pi^2}{12} + 4 \cdot \sum_{l=2,4,6}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}l}}{l^2} \frac{1}{2} \frac{1}{l^2} \mu_l$	$\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \frac{1}{v^2} \mu_v$
B_1' / B_1	1	$1 + 0,098 e^{-(SNR)_1 (1-\pi/4)}$	$1 + 0,098 e^{-(SNR)_1 (1-\pi/4)}$	$1 + 0,35 e^{-(SNR)_1 (1-\pi/4)}$
$G'(\varphi)$	$-\cos \varphi$	$-\mu_1 \cos \varphi$	$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(k+1)}}{k^3} \frac{1}{2} \frac{1}{k^3} \mu_k \cos k\varphi$	$2 \cdot \sum_{v=1,2,3}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \frac{1}{v^2} \mu_v \cos v\varphi$
μ_v	$\mu_v = \frac{1}{2} \sqrt{\pi(SNR)_1} e^{-\frac{(SNR)_1}{2}} \left\{ I_{v-1} \left[\frac{(SNR)_1}{2} \right] + I_{v+1} \left[\frac{(SNR)_1}{2} \right] \right\}$			

Tab.3.1 Kenngrößen des Phasendiskriminator-Modells
für verschiedene Kennlinien

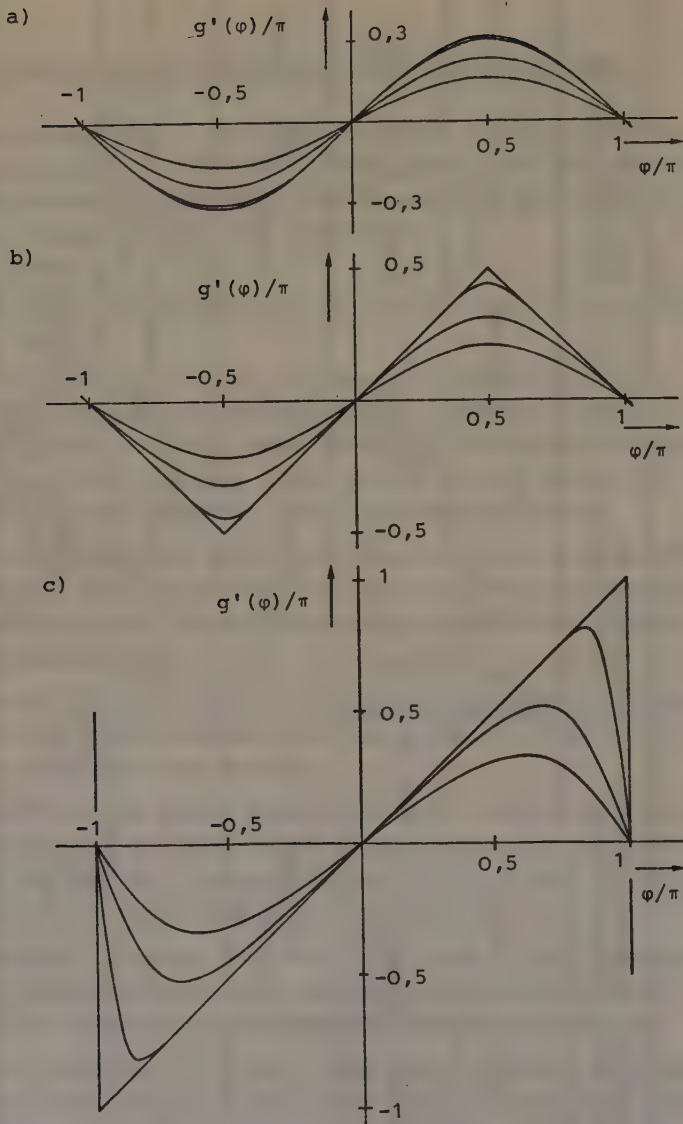


Bild 3.2 Modellkennlinien für Begrenzer-Diskriminatoren mit a) Sinuskennlinie, b) Dreieckkennlinie, c) Sägezahnkennlinie (Kurvenparameter jeweils: $(\text{SNR})_1 = \infty ; 10 ; 1,2 ; 0,4$ vom größten zum kleinsten Kurvenverlauf)

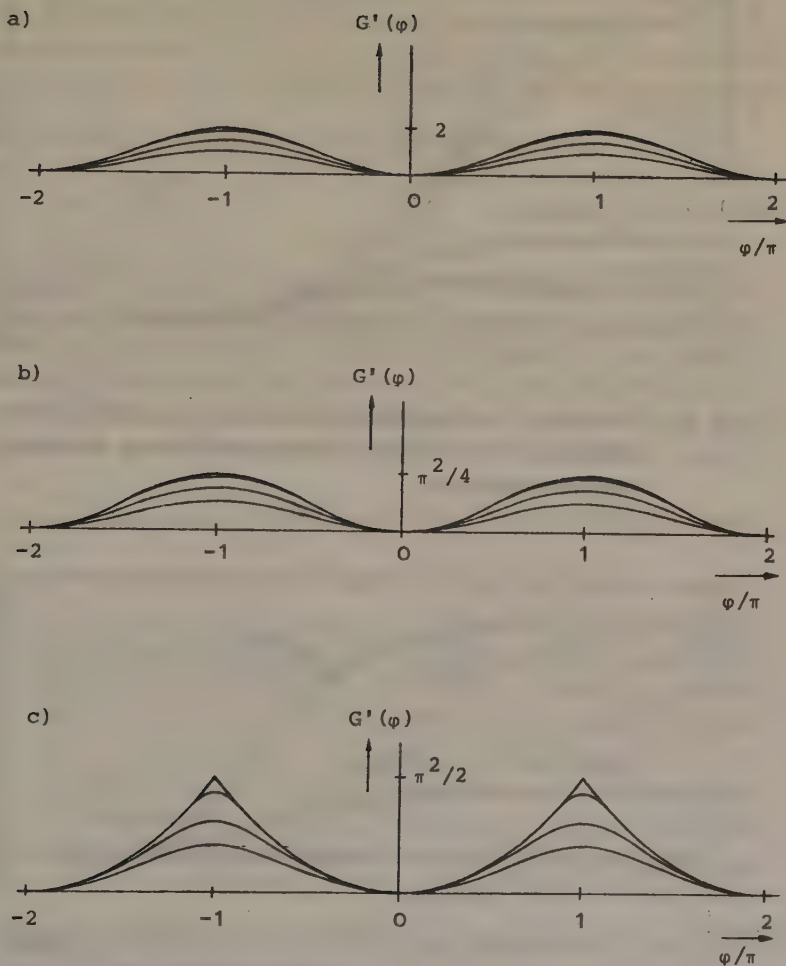


Bild 3.3 Potentiale der Modellkennlinien von Begrenzer-Diskriminatoren mit a) Sinuskennlinie, b) Dreieckkennlinie, c) Sägezahnkennlinie (Kurvenparameter jeweils: $(\text{SNR})_1 = \infty; 10; 1,2; 0,4$ vom größten zum kleinsten Kurvenverlauf)

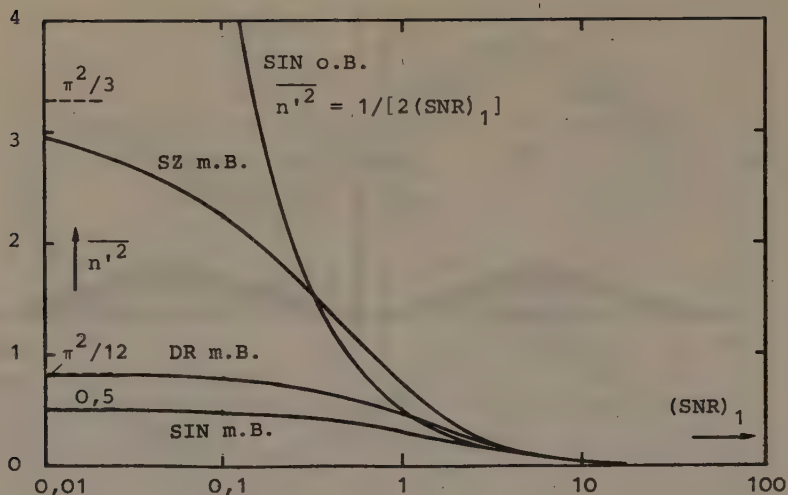


Bild 3.4 Leistung des äquivalenten Phasenrauschens in Abhängigkeit von $(\text{SNR})_1$ für verschiedene Phasendiskriminatoren

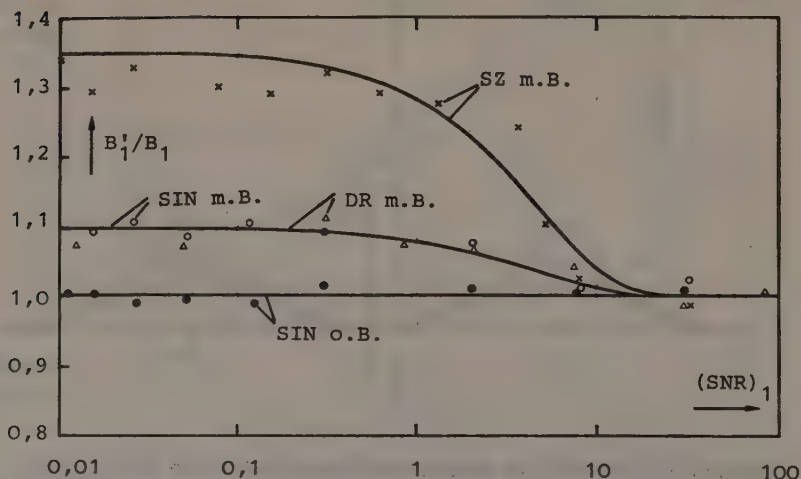


Bild 3.5 Bandbreite des äquivalenten Phasenrauschens in Abhängigkeit von $(\text{SNR})_1$ für verschiedene Phasendiskriminatoren, mit Meßpunkten

teil $g'(\varphi)$ geht jedoch gegen Null, so daß auch hier der Quotient aus Nutzsignal und Störsignal mit $(\text{SNR})_1$ verschwindet. Entsprechend den maximalen Amplituden von $g(\phi)$ ergeben sich für $\overline{n'^2}$ beim Sinus-Diskriminator die kleinsten Werte und für die Sägezahnkennlinie - im Grenzfall $(\text{SNR})_1 \rightarrow 0$ - der doppelte Effektivwert (4-fache Leistung) wie bei der Dreieckkennlinie.

Schließlich ist für die Rauschleistungsdichte

$$N'_0 = \frac{\overline{n'^2}}{B'_1} \quad (3.46)$$

am Diskriminator-Ausgang noch die durch die Begrenzung verursachte Bandbreitenausweitung von Bedeutung, die beim Sinus- und Dreieck-Diskriminator nur maximal 10% und beim Sägezahn-Diskriminator 35% beträgt. Da B'_1 bei der Sägezahnkennlinie am größten ist, wirkt sich in N'_0 die starke Vergrößerung von $\overline{n'^2}$ im Vergleich nicht in vollem Maße aus.

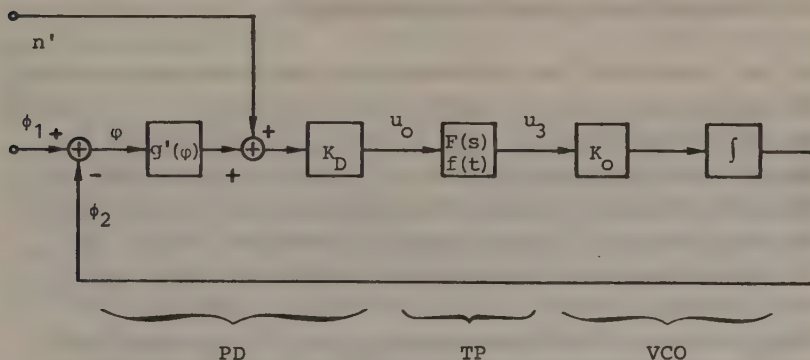


Bild 3.6 Allgemeines nichtlineares Ersatzmodell für den gestörten PLL

Nach der expliziten Berechnung der Modellkennlinien $g'(\varphi)$ und des äquivalenten Phasenrauschens $n'(t)$ für alle Diskriminatoren kann der gestörte Phasenregelkreis nun allgemein durch das nichtlineare Ersatzmodell Bild 3.6 bzw. durch die Differentialgleichung des Systems

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} - \omega_s \int_0^t \{g'[\varphi(\tau)] + n'(\tau)\} f(t-\tau) d\tau \quad (3.47)$$

beschrieben werden.

Durch die Berechnung von Signal- und Störanteil am Diskriminator-Ausgang ist es damit gelungen, die Nichtlinearitäten von Begrenzer und Phasenkennlinie zusammenzufassen und den Begrenzer-Phasendiskriminator differenzfrequent so darzustellen, daß der gesamte Phasenregelkreis mit einer Verallgemeinerung des bekannten und bewährten Rauschmodells (s. Bild 2.4) beschrieben werden kann.

3.6 Vereinfachungen des PLL-Ersatzmodells

Bei der Berechnung des Störverhaltens von Phasenregelkreisen erschweren vor allem die nichtlinearen Elemente - i. a. Begrenzer und Phasenkennlinie - die theoretische Behandlung. Zur Beschreibung des synchronisierten Zustandes können aber verschiedene Vereinfachungen (Näherungsverfahren) des allgemeinen nichtlinearen PLL-Ersatzmodells angegeben werden, die alle bei abnehmendem Signal-Rauschverhältnis $(SNR)_1$ zunehmend ungenauer werden, dafür aber Vorteile haben wie einfache Rechnung im Spektralbereich, relativ einfacher Übergang zum höhergradigen System und auf modulierte Signale.

Für sehr große Signal-Rauschverhältnisse kann das gesamte System mit den Nichtlinearitäten Begrenzer und Phasenkennlinie linearisiert werden. Linearisiert man nur die Modellkennlinie $g'(\varphi)$, so gilt diese Näherung bis zu mittleren $(SNR)_1$. Schließlich kann die Gültigkeitsgrenze zu noch kleineren

$(\text{SNR})_1$ verschoben werden, wenn der nichtlineare Verlauf von $g'(\varphi)$ mit Hilfe eines äquivalenten Verstärkungsfaktors quasilinear approximiert wird (Abschätzung der Gültigkeitsgrenzen s. Abschn. 5.2).

Andere Verfahren zur Approximation von Nichtlinearitäten - wie Volterra-Reihenentwicklung [5,47] und spektrale Approximation [19] - wurden zur näherungsweisen Berechnung des bekannten Modells Bild 2.4 vorgeschlagen. Die quasilineare Näherung hat sich jedoch als günstiger Kompromiß zwischen Aufwand und Genauigkeit herausgestellt [11].

3.6.1 Die äquivalente Verstärkung

Bei der quasilinearen Näherung wird die Nichtlinearität des Ersatzmodells (Bild 3.6) dahingehend vereinfacht, daß die Kennlinie $g'(\varphi)$ durch eine Gerade mit dem äquivalenten Verstärkungsfaktor $K_e = K_e(\sigma_\varphi)$ als Steigung ersetzt wird. Der nichtlineare Verlauf von $g'(\varphi)$ wird dabei näherungsweise berücksichtigt über die Abhängigkeit von K_e von der Streuung σ_φ des Phasenfehlers φ , der die Kennlinie $g'(\varphi)$ aussteuert.

Bei diesem Näherungsverfahren [20,21] der Regelungstechnik wird allgemein ein nichtlineares System durch ein lineares Ersatzsystem mit dem äquivalenten Verstärkungsfaktor K_e derart approximiert, daß die Leistung der Differenz der Ausgangssignale von linearem und nichtlinearem System minimal wird. Für K_e ergibt sich als Lösung dieser Extremwertaufgabe [21]:

$$K_e(\sigma_\varphi) = \frac{1}{\sigma_\varphi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi g'(\varphi) p(\varphi) d\varphi \quad (3.48)$$

Die Verteilungsdichte $p(\varphi)$ des Phasenfehlers ist für nicht zu kleine Signal-Rauschverhältnisse - und nur dafür gilt die quasilineare Approximation - näherungsweise gaußverteilt. Damit

ergibt die Integration gemäß Gl. (3.48) mit $g'(\varphi)$ nach Tab. 3.1 für die einzelnen Phasendiskriminatoren die in Tab. 3.2 zusammengefaßten Beziehungen. Der Rechengang ist in Anhang A6 erläutert.

	K_e	g'_0
Sinus-PD ohne Begrenzer	$e^{-\sigma^2/2}$	1
Begr.-PD Sinus- kennlinie	$\mu_1 e^{-\sigma^2/2}$	μ_1
Begr.-PD Dreieck- kennlinie	$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k} \mu_k e^{-k^2 \sigma^2/2}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k} \mu_k$
Begr.-PD Sägezahn- kennlinie	$2 \sum_{v=1,2}^{\infty} (-1)^{v+1} \mu_v e^{-v^2 \sigma^2/2}$	$2 \sum_{v=1,2}^{\infty} (-1)^{v+1} \mu_v$

Tab. 3.2 Äquivalente Verstärkungsfaktoren K_e und Steigung g'_0 der Modellkennlinien für verschiedene Phasendiskriminatoren

Entsprechend der quasilinearen Näherung wird die Nichtlinearität im PLL-Ersatzmodell gemäß

$$g'(\varphi) = K_e(\sigma_\varphi) \cdot \varphi \quad (3.49)$$

vereinfacht. Damit kann das Zeitbereichsmodell nach Bild 3.6 in den Frequenzbereich transformiert werden. Bezieht man die äquivalente Verstärkung K_e in die quasilineare Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_{oe} = K_e \omega_s \frac{F(s)}{s} \quad (3.50)$$

ein, so ist gemäß Bild 3.6 die Rauscheinspeisung $n'(t)$ durch $n'(t)/K_e$ zu ersetzen, und man erhält als Vereinfachung das quasilineare Ersatzmodell nach Bild 3.7.

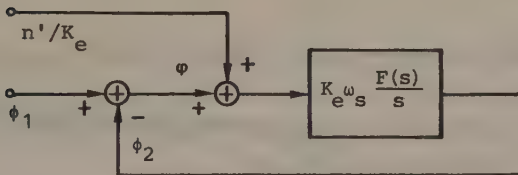


Bild 3.7 Quasilineares Ersatzmodell

Damit ergibt sich sofort die quasilineare Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $G_e(s)$ und die Rauschbandbreite f_{Re} wie in Abschnitt 2.4. Aus den entsprechenden Werten $G(s)$ und f_R in Tab.2.1 folgen $G_e(s)$ und f_{Re} , indem in den Formeln jeweils ω_s durch $K_e \omega_s$ ersetzt wird.

3.6.2 Linearisierung der Modellkennlinie

Eine weitergehende Vereinfachung des nichtlinearen Modells stellt die Linearisierung der Kennlinie $g'(\varphi)$ dar, wobei

$g'(\varphi)$ nur durch die Steigung g'_0 im Ursprung $\varphi=0$ gemäß

$$g'(\varphi) = g'_0 \cdot \varphi \quad (3.51)$$

approximiert wird. Differenziert man die Modellkennlinie $g'(\varphi)$ und setzt $\varphi=0$ so ergibt sich g'_0 wie in Tab.3.2 angegeben. Man erkennt weiterhin, daß man g'_0 aus den äquivalenten Verstärkungsfaktoren K_e als Grenzfall für kleine Werte von σ_φ^2 erhält. Entsprechend setzt die Linearisierung größere Störabstände voraus. Da sich mit dieser Vereinfachung jedoch viele Berechnungen vergleichsweise sehr leicht durchführen lassen, ist die Linearisierung für eine Abschätzung des Störverhaltens im synchronisierten Betrieb des PLL gut geeignet. Daher wird in Bild 3.8 der Verlauf von g'_0 über dem Störabstand $(\text{SNR})_1$ grafisch dargestellt..

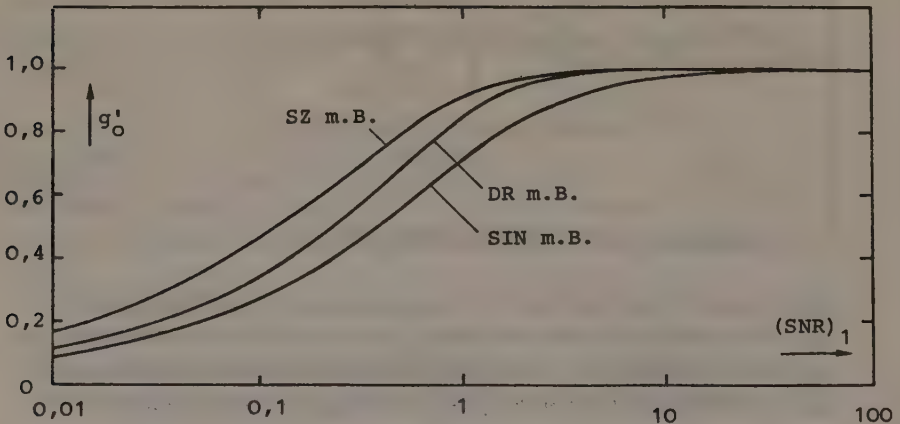


Bild 3.8 Steigung der Modellkennlinien $g'(\varphi)$ bei $\varphi=0$

Wegen der Linearisierung kann, ebenso wie im vorangehenden Abschnitt, das nichtlineare Modell Bild 3.6 im Frequenzbereich vereinfacht wie in Bild 3.9 dargestellt werden mit der Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$G_{OL}(s) = g'_O \cdot \omega_s \frac{F(s)}{s} \quad (3.52)$$

Ebenso ergeben sich die Übertragungsfunktion $G_L(s)$ und die Rauschbandbreite f_{RL} des linearisierten Modells aus den entsprechenden Beziehungen in Tab.2.1 indem ω_s jeweils durch

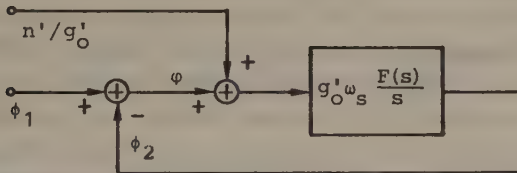


Bild 3.9 Linearisiertes Ersatzmodell

$g'_O \omega_s$ ersetzt wird. Da in diesem verallgemeinerten linearisierten Modell weiterhin $n'(t)$ (s.Tab.3.1) und g'_O (s.Tab.3.2) von der realisierten Diskriminator-Charakteristik abhängen, unterscheiden sich die damit berechneten Ergebnisse im Falle eines Begrenzer-Diskriminators von denen des linearen Modells in Abschnitt 2.4.

3.6.3 Gesamtlinearisierung

Bei der Gesamtlinearisierung werden die nichtlinearen Effekte von Begrenzer und Phasenkennlinie vernachlässigt. Der nichtlineare Zusammenhang am Diskriminatorausgang Gl.(3.1) wird linearisiert gemäß:

$$g(\varphi + \phi_n) = \varphi + \phi_n \quad \text{für } (\text{SNR})_1 \gg 1 \quad (3.53)$$

Außerdem wird die nichtlineare Abhängigkeit (s. Gl. 2.9) der Störphase ϕ_n von den Komponenten N_s und N_c des Schmalbandrauschens (wegen $N_s, N_c \ll u_1$) vernachlässigt.

$$n'(t) = \phi_n(t) = \frac{N_c(t)}{u_1} \quad (3.54)$$

Damit ergeben sich, wie zu erwarten ist, die Verhältnisse wie für den linearisierten PLL ohne Begrenzer in Abschnitt 2.4. Insbesondere folgt aus Gl. (3.54):

$$\overline{n'^2} = \overline{n^2} / u_1^2 = \frac{1}{2(\text{SNR})_1} \quad (3.55)$$

$$B'_1 = B_1 \quad (3.56)$$

Dies sind die Grenzwerte, gegen die $\overline{n'^2}$ und B'_1 nach Abschnitt 3.3 und 3.4 bzw. Bild 3.4 und 3.5 für große $(\text{SNR})_1$ streben.

4. NICHTLINEARE BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR DAS PLL - STÖRVERHALTEN

Das Störverhalten von Phasenregelkreisen mit allgemeinen Diskriminator-Charakteristiken wird anhand der drei wichtigen Rauscheigenschaften, nämlich der Statistik des Phasenfehlers, dem Fangverhalten und den Demodulationseigenschaften beschrieben.

Die Statistik des Phasenfehlers $\varphi(t)$, gekennzeichnet z.B. durch die Verteilungsdichte und besonders durch die Leistung bzw. Varianz σ_{φ}^2 , charakterisiert die Störungen des regenerierten Signals am VCO-Ausgang im synchronisierten und eingeschwungenen Zustand. Wegen der 2π -periodischen Nichtlinearität des Systems ist der Phasenfehler grundsätzlich ein im mathematischen Sinne nicht stationärer Prozeß[8], da regellose, von der Störung verursachte Übergänge (2π -Phasensprünge) zwischen den im Abstand von 2π benachbarten stabilen Arbeitspunkten (s. "Wellblechmodell" Abschn.2.3) auftreten. Daher werden die Varianz und die Verteilungsdichte von $\varphi(t)$ für den auf den Bereich $[-\pi, +\pi] \bmod 2\pi$ reduzierten Phasenfehler betrachtet, so daß sich hier stationäre Verhältnisse ergeben.

Um dennoch den Phasenfehler auch außerhalb des Intervalls der Breite 2π statistisch zu erfassen, wird zusätzlich zur $\bmod 2\pi$ reduzierten Statistik die Häufigkeit von 2π -Phasensprüngen angegeben.

Das Fangverhalten bei Rauschstörungen wird hier zum einen beschrieben durch den Haltebereich zur Kennzeichnung des Frequenzbereiches, in dem die Synchronisation maximal aufrechterhalten werden kann, und zum anderen durch den Fangbereich, der das Frequenzintervall angibt, innerhalb dessen - unabhängig von den Anfangsbedingungen - die Synchronisation nach endlicher Zeit erreicht wird. Das Fangverhalten resultiert unmittelbar aus den nichtlinearen Eigenschaften des PLL; eine Vereinfachung im Sinne einer Linearisierung führt deshalb hier - wie auch bei der Berechnung der 2π -Phasensprünge - nicht zum Ziel.

Das Störverhalten des Phasenregelkreises in der Anwendung als Frequenzdemodulator wird durch den Signal-Rauschabstand des demodulierten NF-Signals beschrieben. Die nichtlinearen Eigenschaften des PLL wirken sich dabei in Form der sogenannten FM-Demodulatorschwelle aus. Sinkt das Eingangs-Signal-Rauschverhältnis unter diesen Schwellwert, so nimmt der Ausgangs-Störabstand sehr stark ab, so daß die störbefreiende Wirkung des Modulationsverfahrens aufgehoben wird.

In diesem 4. Abschnitt werden die Berechnungsverfahren für alle oben erwähnten Rausch-Kenngrößen vorgestellt. Grundlage der Berechnungen ist dabei das Rauschersatzschaltbild in seiner allgemeinen Form (Bild 3.6). Die Ergebnisse sind jeweils so dargestellt, daß sie für beliebige Diskriminator-Charakteristiken gelten. Für explizite Resultate sind dann die entsprechenden Kenndaten der jeweiligen Diskriminator-Realisierung einzusetzen.

In den Abschnitten 4.1 und 4.2 werden hierfür aus der Literatur bekannte Methoden für sinusförmige Phasendiskriminatoren ohne Begrenzer auf den allgemeinen Fall erweitert. Die Berechnung des Fangverhaltens und die Berechnung und Optimierung der Demodulatorschwelle geschieht - über eine Verallgemeinerung hinaus - nach neu entwickelten Verfahren.

4.1 Verteilungsdichte und Varianz des Phasenfehlers

Für die Verteilungsdichte und die Varianz des Phasenfehlers werden in der Literatur verschiedene nichtlineare Berechnungsverfahren angegeben, die alle von dem in Bild 2.4 beschriebenen Modell für den Diskriminator ohne Begrenzer ausgehen. In den Arbeiten [1,2,3,23,24,25] wird die Fokker-Planck-Gleichung zur Berechnung der Verteilungsdichte des Phasenfehlers benutzt. Für den PLL 1.Ordnung [$F(s)=1$] ergibt sich dabei eine geschlossene, im Rahmen der getroffenen Voraussetzungen exakte Lösung, während der Ansatz beim System 2.Ordnung nur

mit zusätzlichen Näherungen lösbar ist. Die Fokker-Planck-Methode, sowie das lineare und quasilineare Näherungsverfahren (s. Abschn.3.6) werden im Rahmen dieser Arbeit behandelt.

4.1.1 Näherungsweise Berechnung mit dem linearen und quasilinearen Modell

Da hier der synchronisierte und eingeschwungene Zustand ohne Verstimmung $\Delta\Omega$ untersucht werden soll, können näherungsweise die vereinfachten Modelle in Abschnitt 3.6 zugrundegelegt werden. Dabei wird zwar die Gültigkeitsgrenze (vergl. Abschn. 5.2) zunehmend in der Reihenfolge: Quasilinearisierung, Linearisierung, Gesamtlinearisierung zu größeren Störabständen $(\text{SNR})_1$ verschoben, andererseits ist aber eine relativ einfache Rechnung im Spektralbereich möglich, so daß die Berechnung des Systems 2.Ordnung keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitet.

Quasilinearisierung mit der äquivalenten Verstärkung:

Nach Bild 3.7 gilt für die Varianz von $\varphi(t)$ mit der aus der Theorie linearer Filter bekannten Beziehung:

$$\sigma_{\varphi}^2 = \frac{N_o}{K_e} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_e(\omega)|^2 d\omega \quad (4.1)$$

wobei $G_e(s)$ die Übertragungsfunktion

$$G_e(s) = \frac{G_{oe}(s)}{1+G_{oe}(s)} \quad (4.2)$$

($G_{oe}(s)$ s. Gl.3.50) und

$$f_{Re} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |G_e(\omega)|^2 d\omega \quad (4.3)$$

die Rauschbandbreite des quasilinearen Modells sind.

Für den Phasenregelkreis 1.Ordnung ohne Kreisfilter gilt z.B. entsprechend Tab.2.1

$$f_{\text{Re}} = K_e \omega_s / 4 \quad (4.4)$$

und für einen aktiven PI-Regler wird

$$f_{\text{Re}} = \frac{1+K_e K}{4T} \quad (4.5)$$

Damit gilt nach Gl.(4.1) allgemein für entsprechendes f_{Re}

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\overline{n_1^2}}{B_1'} \cdot \frac{1}{K_e^2} \cdot 2 f_{\text{Re}} \quad (4.6)$$

Die Varianz σ_φ^2 ist also von $(\text{SNR})_1$ und über die Rauschbandbreite f_{Re} von den Parametern des Regelkreises abhängig. Außerdem ist Gl.(4.6) wegen $K_e = K_e(\sigma_\varphi)$ transzendent und kann i.a. nur iterativ gelöst werden.

Linearisierung der Modellkennlinie:

Das linearisierte Modell Bild 3.9 entspricht dem quasilinearen Ersatzmodell mit dem Unterschied, daß der Koeffizient g'_0 hier unabhängig von σ_φ^2 nur eine Funktion vom Eingangs-HF-Störabstand $(\text{SNR})_1$ ist. Entsprechend sind hier die Rauschbandbreiten f_{RL} für den filterlosen Kreis

$$f_{\text{RL}} = g'_0 \omega_s / 4 \quad (4.7)$$

und für den Kreis mit aktivem PI-Regler

$$f_{RL} = \frac{1+g_o'K}{4T} \quad (4.8)$$

Die Varianz σ_φ^2 wird bei dieser Näherung

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\overline{n'^2}}{B_1} \cdot \frac{1}{g_o'^2} \cdot 2 f_{RL} \quad (4.9)$$

Ihre Bestimmungsgleichung ist nicht mehr transzendent.

Gesamtlinearisierung:

Bei der Gesamtlinearisierung nach Abschnitt 3.6.3 gelten für alle Phasendiskriminatoren die Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Rauschbandbreite f_R des linearen Modells in Tab.2.1. Mit den Gleichungen (3.55) und (3.56) ergibt sich dann für die Varianz

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\overline{n'^2}}{2B_1} \cdot 2 f_R = \frac{1}{\alpha} \quad (4.10)$$

Die Varianz ist also hier gleich der in Gl.(2.31) definierten normierten Rauschleistung $1/\alpha$.

Es ist nun zweckmäßig und in der Literatur üblich, die in verschiedenen Stufen der Näherung berechnete Varianz σ_φ^2 mit dem Ergebnis $\sigma_\varphi^2 = 1/\alpha$ bei Gesamtlinearisierung zu vergleichen und σ_φ^2 stets in Abhängigkeit von $1/\alpha$ darzustellen (Normierung auf die Rauschbandbreite f_R). Für Regelkreise mit Begrenzer-Diskriminator werden die Ergebnisse dann i.a. zusätzlich vom Bandbreitenverhältnis

$$v = \frac{f_R}{B_1} = \frac{(SNR)_1}{\alpha} \quad (4.11)$$

abhängig (vergl. Abschn.5).

4.1.2 Berechnung des PLL 1.Ordnung mit der Fokker-Planck-Gleichung

Zur Berechnung von stochastisch erregten nichtlinearen Systemen eignet sich die Fokker-Planck-Gleichung, für deren Herleitung und ausführliche Beschreibung auf die Literatur [26,7] verwiesen wird. Es handelt sich dabei um eine partielle Differentialgleichung vom Typ der Diffusionsgleichung für (im vorliegenden Fall) die Verbundverteilungsdichte $p(\varphi, t)$, die für Systeme 1.Ordnung die Gestalt hat:

$$\frac{\partial p(\varphi, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_1(\varphi) p(\varphi, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [A_2(\varphi) p(\varphi, t)] \quad (4.12)$$

Vorausgesetzt wird dabei, daß $\varphi(t)$ ein Markoff-Prozeß [26] ist. Man kann zeigen [8], daß diese Voraussetzung für das System 1.Ordnung erfüllt ist, wenn die stochastische Erregung - hier $n'(t)$ - ein weißes Spektrum mit einer impulsförmigen Autokorrelationsfunktion hat. Dies ist wegen $B_1' \gg f_R$ in guter Näherung erfüllt und wird auch bei der Herleitung des PLL-Modells verwendet.

Ferner ist bei der Form von Gl.(4.12) vorausgesetzt, daß Fokker-Planck-Koeffizienten $A_\nu(\varphi)$ für $\nu > 2$ verschwinden, was für gaußverteilte Erregungen der Fall ist [8]. Da die Rauscherregung $n'(t)$ im allgemeinen Fall im Gegensatz zum PLL ohne Begrenzer nicht mehr gaußverteilt ist (siehe z.B. Gl.3.13 in Verbindung mit Gl.3.33), ist nicht gesichert, daß die A_ν für $\nu > 2$ verschwinden. Trotzdem wird für eine Beurteilung des Einflusses der PLL-Nichtlinearität die Fokker-Planck-Gleichung in obiger Form angesetzt.

Für die explizite Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten sind Grenzwerte bedingter Erwartungswerte zu berechnen, die sich aus der Systemdifferentialgleichung (3.47) des Kreises 1.Ordnung ergeben (s. Anhang A7, $\Delta\Omega=0$ vorausgesetzt):

$$A_1(\varphi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \{ \Delta \varphi | \varphi \} = -\omega_s g'(\varphi) \quad (4.13)$$

$$A_2(\varphi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \{ \Delta \varphi^2 | \varphi \} = \omega_s^2 N'_0 \quad (4.14)$$

Für den mod 2π reduzierten Phasenfehler interessiert hier die stationäre zeitunabhängige Verteilungsdichte $p(\varphi, t \rightarrow \infty) = p(\varphi)$. Setzt man für $A_v, v=1,2$, die berechneten Werte ein, so vereinfacht sich die Fokker-Planck-Gleichung (4.12) im Intervall $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ mit der Abkürzung

$$\frac{1}{a} = N'_0 \cdot 2f_R = \frac{n_1^2}{B_1} \cdot 2f_R \quad ; \quad f_R = \frac{\omega_s}{4} \quad (4.15)$$

(a ist somit eine Funktion von $1/\alpha$ und v) und der Integrationskonstanten Q zu:

$$Q = a g'(\varphi) p(\varphi) + \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \quad (4.16)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet [27]:

$$p(\varphi) = e^{-a \int_{-\pi}^{\varphi} g'(x) dx} \left[Q \int_{-\pi}^{\varphi} e^{a \int_{-\pi}^{\omega} g'(x) dx} d\omega + C \right] \quad (4.17)$$

Die Konstante Q ergibt sich wegen der ungeraden Kennlinie $g'(\varphi)$ aus der Symmetriebedingung $p(\varphi) = p(-\varphi)$ wegen $\Delta\Omega=0$ stets zu $Q=0$. Mit der Konstanten C muß dann die Normierungsbedingung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi) d\varphi = 1 \quad (4.18)$$

erfüllt werden, so daß sich bei Verwendung des Potentials $G'(\varphi)$ nach Gl. (3.45) für die Verteilungsdichte des Phasenfehlers allgemein ergibt

$$p(\varphi) = \left[\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-aG'(\varphi)} d\varphi \right]^{-1} \cdot e^{-aG'(\varphi)} \quad (4.19)$$

mit $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ und a nach Gl. (4.15).

Die Varianz des Phasenfehlers erhält man schließlich aus $p(\varphi)$ nach Gl. (4.19) durch Integration

$$\sigma_{\varphi}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^2 p(\varphi) d\varphi \quad (4.20)$$

4.1.3 Berechnung des PLL 2.Ordnung mit der Fokker-Planck-Gleichung

Auch für den Kreis 2.Ordnung ist die Verteilungsdichte des Phasenfehlers die Lösung einer, allerdings zweidimensionalen, Fokker-Planck-Gleichung [26]. Die Auswertung führt hier - anders als beim Kreis 1.Ordnung - jedoch nur auf geschlossene Lösungen, wenn im Verlauf der Rechnung weitere Näherungen eingeführt werden.

Im folgenden wird als Kreisfilter ein aktiver PI-Regler mit der Übertragungsfunktion nach Bild 2.3 betrachtet. Damit ist auch näherungsweise der Fall des passiven PI-Reglers mitbehandelt, wenn $m \ll 1$ und $\omega_s T \gg 1$ ("high gain loop") ist, solange keine statischen Phasenfehler auftreten ($\Delta\Omega=0$) [10].

Die Differentialgleichung des Systems lautet dann:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -m\omega_s [g'(\varphi) + n'] - \frac{m\omega_s}{T} \int_0^t \{g'[\varphi(\tau)] + n'(\tau)\} d\tau \quad (4.21)$$

Bei Verwendung von Zustandsvariablen x_0 und x_1 derart, daß

$$\varphi(t) = x_1(t) + \frac{1}{T} x_0(t) \quad (4.22)$$

kann die Differentialgleichung (4.21) 2.Ordnung in ein System von zwei Differentialgleichungen 1.Ordnung aufgespalten werden, deren Lösungen x_0 und x_1 die Komponenten eines zweidimensionalen Vektor-Markoff-Prozesses $\underline{x}(t)=[x_0(t), x_1(t)]$ darstellen [8]. Damit liegt die Voraussetzung vor für die Anwendbarkeit der zweidimensionalen Fokker-Planck-Gleichung für die Verbundverteilungsdichte $p(x_0, x_1, t)$ [26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x_0, x_1, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x_0} A_{01} p(x_0, x_1, t) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_1} A_{10} p(x_0, x_1, t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \frac{1}{2} A_{02} p(x_0, x_1, t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1} A_{11} p(x_0, x_1, t) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{2} A_{20} p(x_0, x_1, t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Berechnet man die Koeffizienten $A_{\mu, \nu}$ nach der Regel [26]

$$A_{\mu, \nu}(x_0, x_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E \{ (\Delta x_0)^\nu \cdot (\Delta x_1)^\mu | \underline{x} \}, \quad (4.24)$$

so wird die Fokker-Planck-Gleichung (4.23) für den stationären Fall

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} p(x_0, x_1) = & m \omega_S \frac{\partial}{\partial x_1} [g'(x_1 + \frac{1}{T} x_0) p(x_0, x_1)] + \\ & + \frac{m^2 \omega_S^2 N'_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} p(x_0, x_1). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Durch nichtlineare Transformation [z.B. 7, 26] von $p(x_0, x_1)$ in $p(z, \varphi)$ und Integration über z erhält man eine Differentialgleichung für $p(\varphi)$:

$$0 = \frac{d}{d\varphi} \left[m\omega_S g'(\varphi) p(\varphi) + \frac{m^2 \omega_S^2 N_O}{2} \frac{d}{d\varphi} p(\varphi) - \frac{1}{T} \varphi p(\varphi) - \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z p(z, \varphi) dz \right]. \quad (4.26)$$

Der letzte Summand in Gl. (4.26) ist nicht integrierbar. Er führt nach einer Umformung [8] auf das Integral über einen bedingten Erwartungswert, so daß sich schließlich für $p(\varphi)$ folgende Differentialgleichung ergibt:

$$0 = \frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{2}{m\omega_S N_O} \left[g'(\varphi) \frac{1}{T} \int_0^{\infty} E\{g'[\varphi(t+\tau)] | \varphi(t)\} d\tau \right] p(\varphi) + \frac{d}{d\varphi} p(\varphi) \right\}. \quad (4.27)$$

Die Form dieser Gleichung ist nun bis auf das Integral über den bedingten Erwartungswert dieselbe wie beim filterlosen Kreis (vergl. Gl. 4.16 abgeleitet nach φ). Der Integrand kann ohne Kenntnis der Statistik von φ nicht exakt berechnet werden. Gl. (4.27) kann daher nur nach Einführung einer Näherung für den bedingten Erwartungswert weiter ausgewertet werden. Dies geschieht im folgenden in zwei Stufen der Näherung.

4.1.3.1 Lösung bei linearer Näherung des bedingten Erwartungswertes

Über den von der Zeitdifferenz τ abhängigen Integranden $E\{g'[\varphi(t+\tau)] | \varphi(t)\}$ kann man zunächst die folgenden beiden Aussagen machen:

1. Sein Wert an der Stelle $\tau = 0$ ist $g'[\varphi(t)]$
2. Der Verlauf von $E\{g'[\varphi(t+\tau)]|\varphi(t)\}$ über τ kann nicht exakt berechnet werden. Man kann lediglich zeigen [8], daß

$$E\{\varphi(t+\tau)|\varphi(t)\} = \frac{R_{\varphi}(\tau)}{\sigma_{\varphi}^2} \cdot \varphi \quad (4.28)$$

gilt. Dieses Ergebnis wird hier verwendet und damit vorausgesetzt, daß die Korrelation zwischen den Prozessen $g'(\varphi)$ und φ durch die (Auto-)Korrelation des Prozesses φ angenähert werden kann.

Wegen dieser beiden Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes wird die Näherung

$$E\{g'[\varphi(t+\tau)]|\varphi(t)\} = \frac{R_{\varphi}(\tau)}{\sigma_{\varphi}^2} \cdot g'(\varphi) \quad (4.28a)$$

angesetzt und man erhält für das unbekannte Integral in Gl. (4.27)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E\{g'[\varphi(t+\tau)]|\varphi(t)\} d\tau &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_{\varphi}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\varphi}(\tau) d\tau \cdot g'(\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{S_{\varphi}(0)}{\sigma_{\varphi}^2} g'(\varphi). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dieses Integral entspricht der Fläche eines Rechteckes mit der (exakten) Höhe $g'(\varphi)$ und der (approximierten) Korrelationszeit [7] $\tau_{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot S_{\varphi}(0) / \sigma_{\varphi}^2$ von $\varphi(t)$ als Breite.

In erster Näherung können $S_{\varphi}(0)$ und σ_{φ}^2 mit dem linearisierten Modell (s. Abschn. 3.6.2) berechnet werden. Für σ_{φ}^2 gilt

dann Gl. (4.9) und $S_{\varphi}(0) = N'_0 / g'_0{}^2$. Es wird damit näherungsweise:

$$\int_0^{\infty} E\{g'[\varphi(t+\tau)]|\varphi(t)\} d\tau = \frac{T}{1+g'_0 K} g'(\varphi) \quad (4.30)$$

Damit und mit der Abkürzung

$$\frac{1}{a_L} = N'_0 \cdot 2 f_R \frac{1+g'_0 K}{g'_0(1+K)} \quad (4.31)$$

(a_L ist eine Funktion von $1/\alpha$, v und K) reduziert sich die Gl. (4.27) für $p(\varphi)$ nach einer Integration auf ($Q = \text{const}$; vergl. Gl. 4.16)

$$Q = a_L g'(\varphi) p(\varphi) + \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} \quad (4.32)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich die Verteilungsdichte $p(\varphi)$ wie in Abschnitt 4.1.2

$$p(\varphi) = \left[\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-a_L G'(\varphi)} d\varphi \right]^{-1} e^{-a_L G'(\varphi)} \quad (4.33)$$

mit $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ und a_L nach Gl. (4.31).

Die Varianz σ_{φ}^2 läßt sich damit berechnen:

$$\sigma_{\varphi}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi^2 p(\varphi) d\varphi \quad (4.34)$$

und über der normierten Rauschleistung $1/\alpha$ (s. Tab. 2.1) mit dem Bandbreitenverhältnis v (s. Gl. 4.11) und der Kreisverstärkung K als Parameter darstellen (s. Abschn. 5.2).

4.1.3.2 Lösung bei quasilinearer Näherung des bedingten Erwartungswertes

In [11] wird vom Verfasser für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer ein verbessertes Näherungsverfahren beschrieben, bei dem der mit σ_φ^2 wachsende Einfluß der Nichtlinearität dadurch berücksichtigt wird, daß $S_\varphi(0)$ und σ_φ^2 in Gl.(4.29) aus dem quasilinearen Modell berechnet werden.

Wendet man diese Methode für beliebige Diskriminator-Realisierungen an, so wird nach Abschnitt 3.6.1 $S_\varphi(0) = N'_0/K_e^2$ und für σ_φ^2 gilt Gl.(4.6). Für den bedingten Erwartungswert erhält man dann in verbesserter Näherung entsprechend Gl.(4.30)

$$\int_0^\infty E\{g'[\varphi(t+\tau)]|\varphi(t)\} d\tau = \frac{T}{1+K_e K} g'(\varphi) \quad (4.35)$$

mit $K_e = K_e(\sigma_\varphi)$, und es gelten, wenn man a_L in Gl.(4.31) durch a_e

$$\frac{1}{a_e} = N'_0 \cdot 2 f_R \frac{1+K_e K}{K_e (1+K)} \quad (4.36)$$

ersetzt, die Gleichungen (4.33) und (4.34) für $p(\varphi)$ bzw. σ_φ^2 , die jetzt iterativ gelöst werden müssen.

4.2 Die Häufigkeit von Phasensprüngen

Die von der Störung am Eingang verursachten 2π -Phasensprünge beeinflussen den Signal-Rauschabstand am PLL-Ausgang im nichtlinearen Betriebsbereich und bestimmen z.B. maßgebend den Schwellwert des PLL-FM-Demodulators. Da die nichtlineare und 2π -periodische Modellkennlinie $g'(\varphi)$ entscheidend ist für solche Übergänge des Phasenfehlers von einem stabilen Arbeitspunkt zum nächsten (s. "Wellblechmodell", Abschn.2.3), ist

eine Berechnung nur bei voller Berücksichtigung der Nichtlinearität möglich.

In diesem Abschnitt wird, aufbauend auf dem nichtlinearen Ersatzmodell mit Hilfe einer Verallgemeinerung von aus der Literatur [3,8,28] bekannten Berechnungsverfahren (Fokker-Planck-Gleichung, Theorie der Zufallsläufe), eine analytische Lösung für den PLL mit beliebigen Diskriminator-Charakteristiken einschließlich Begrenzer ermittelt. Um die Anwendbarkeit des allgemeinen Ersatzmodells zu zeigen, genügt hier die Berechnung des PLL 1.Ordnung, da die Behandlung des Systems 2. Ordnung noch wesentlich komplizierter ist, so daß hierfür aus der Literatur keine für eine Verallgemeinerung geeigneten Berechnungsverfahren bekannt sind [50].

Zunächst wird für $\Delta\Omega=0$ die mittlere Zeit $\overline{\tau}_{2\pi}$ zwischen 2π -Phasensprüngen berechnet. Die mittlere Anzahl von Phasensprüngen je Zeiteinheit ist dann der Kehrwert $1/\overline{\tau}_{2\pi}$. Der Phasenfehler $\varphi(t)$ wird dabei als "stochastischer Markoff-Prozeß mit absorbierenden Grenzen" bei $\varphi = \pm 2\pi$ betrachtet [26]. $\overline{\tau}_{2\pi}$ wird berechnet als Mittelwert der Zeit τ (Zufallsvariable), die vergeht, bis der Phasenfehler φ , ausgehend vom Anfangszustand $\varphi(t=0)=0$ zum ersten Mal einen auf der periodischen PD-Kennlinie benachbarten stabilen Arbeitspunkt bei $\varphi(t=\tau)=\pm 2\pi$ erreicht. Die Berechnung erfolgt über die zeitabhängige Verteilungsdichte des Phasenfehlers mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung.

Die zeitabhängige Verteilungsdichte $p(\varphi, t)$ des oben beschriebenen stochastischen Prozesses mit absorbierenden Grenzen ist in Bild 4.1 skizziert.

Mit zunehmender Zeit t erreichen immer mehr Musterfunktionen die Grenzen $\pm 2\pi$ und werden absorbiert, was in einem Anwachsen der Dirac-Funktionen am Rande zum Ausdruck kommt.

Die Querschnittsflächen unter der Kurve $q(\varphi, t)$ ("Verteilungs"-funktion aller Musterfunktionen φ , die zur Zeit t die Grenze $|2\pi|$ noch nicht erreicht haben) in Bild 4.1 geben die Wahrscheinlichkeit $\psi(t)$ dafür an, daß zur Zeit $t=\tau$ die Schranke $|2\pi|$ noch nicht erreicht ist:

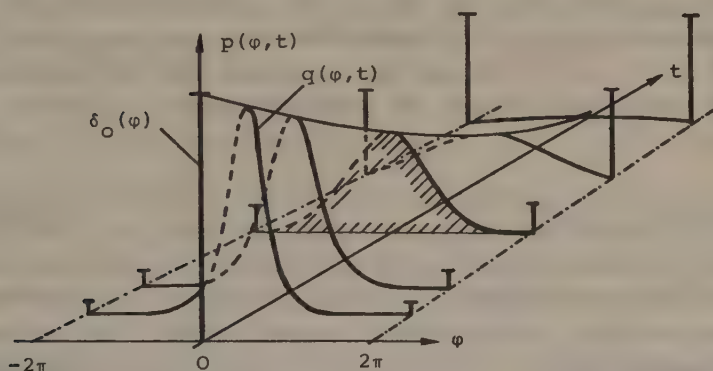


Bild 4.1 Zeitabhängige Verteilungsdichte $p(\varphi, t)$ des stochastischen Prozesses: "Phasenfehler mit absorbierenden Grenzen bei $\pm 2\pi$ "

$$\psi(\tau) = \int_{-2\pi}^{+2\pi} q(\varphi, \tau) d\varphi \quad (4.37)$$

Nach Komplementierung und Differentiation erhält man die Verteilungsdichte für die interessierende Zufallsvariable τ :

$$p(\tau) = \frac{d[1-\psi(\tau)]}{d\tau} = - \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \quad (4.38)$$

Der gesuchte Mittelwert wird dann nach einer partiellen Integration und mit Gl. (4.37):

$$\overline{\tau}_{2\pi} = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \psi(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \int_{-2\pi}^{+2\pi} q(\varphi, \tau) d\varphi d\tau. \quad (4.39)$$

Gl. (4.39) stellt den Zusammenhang zur Funktion $q(\varphi, \tau)$ her. Es wird angenommen [8], daß $q(\varphi, \tau)$ der eindimensionalen Fokker-Planck-Gleichung (4.12) genügt, mit den Koeffizienten A_v nach Gl. (4.13) und (4.14) und den folgenden, dem vorliegenden Problem angepaßten Anfangs- und Randbedingungen ($\delta_0 =$ Dirac-Impuls):

$$q(\varphi, 0) = \delta_0(\varphi) \quad (4.40a)$$

$$q(2\pi, \tau) = q(-2\pi, \tau) = 0 \quad (4.40b)$$

$$q(\varphi, \tau \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.40c)$$

Integriert man nun die Fokker-Planck-Gleichung gemäß Gl. (4.39) zunächst über τ

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial q(\varphi, \tau)}{\partial \tau} d\tau &= \omega_S \frac{\partial}{\partial \varphi} g'(\varphi) \int_0^{\infty} q(\varphi, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \omega_S^2 N_0' \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_0^{\infty} q(\varphi, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.41)$$

und definiert eine Hilfsfunktion $r(\varphi)$

$$r(\varphi) = \int_0^{\infty} q(\varphi, \tau) d\tau,$$

so ergibt sich daraus mit

$$q(\varphi, \infty) - q(\varphi, 0) = -\delta_0(\varphi) = \omega_s \frac{\partial}{\partial \varphi} g'(\varphi) r(\varphi) + \frac{1}{2} \omega_s^2 N'_0 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} r(\varphi) \quad (4.41a)$$

eine lineare Differentialgleichung für die Hilfsfunktion $r(\varphi)$ mit der Lösung (s. Anhang A8):

$$r(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{a}{\omega_s} e^{-aG'(\varphi)} \int_{\varphi}^{\infty} e^{aG'(w)} dw; \quad \varphi \geq 0 \quad (4.42)$$

wobei a in Gl.(4.15) definiert ist.

Die zur Bestimmung von $\overline{\tau_{2\pi}}$ noch notwendige Integration über φ (s. Gl.4.39) läßt sich unter Ausnutzung der Symmetrie und Periodizität der Kennlinie $g'(\varphi)$ so vereinfachen (s. Anhang A8), daß nur noch eindimensionale bestimmte Integrale auszuwerten sind. Für beliebige, 2π -periodische, ungerade Kennlinien ergibt sich demnach für die Zeit zwischen 2π -Phasensprüngen der Zusammenhang

$$\overline{\tau_{2\pi}} \omega_s = 2a \int_0^{\pi} e^{-aG'(\varphi)} d\varphi \int_0^{\pi} e^{+aG'(\varphi)} d\varphi. \quad (4.43)$$

Dabei ist $G'(\varphi)$ das Potential der jeweiligen Modellkennlinie und a ist in Gl.(4.15) als Funktion von $1/\alpha$ und v definiert.

4.3 Das Fangverhalten

Wie in Abschnitt 4.2 erfordert auch die Berechnung des Fang- und Haltebereichs von Phasenregelkreisen die vollständige Berücksichtigung der nichtlinearen Modellkennlinie. Die Berechnung des Fangbereiches ist selbst ohne Berücksichtigung einer Störung kompliziert und - bis auf wenige Spezialfälle - nicht

Der Behandlung in diesem Abschnitt liegt der passive PI-Regler zugrunde, für den im Gegensatz zum aktiven PI-Glied das Fangverhalten von besonderem Interesse ist.

4.3.1 Die Berechnung des Haltebereichs

Der Haltebereich $\Delta\Omega_H$ ist definiert als diejenige maximale Frequenzverstimmung $\Delta\Omega$ zwischen Referenzfrequenz und VCO-Ruhefrequenz, bei der die Synchronisation des Regelkreises noch erhalten bleibt.

Im unverrauschten Fall kann man den Haltebereich aus dem Maximum der Diskriminator-Kennlinie g und dem Kreisfilterfrequenzgang bei $\omega=0$ exakt berechnen

$$\pm\Delta\Omega_H = |F(j\omega=0)| \omega_s \max\{g\} \quad (4.44)$$

Dieses Ergebnis erhält man z.B. aus der Darstellung der nicht-linearen stationären Systemgleichung (3.47) mit $d\phi_1/dt = \Delta\Omega$ und $n'=0$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega = \Delta\Omega - \omega_s g(\phi) |F(j\omega=0)| \quad (4.45)$$

als Phasendiagramm [z.B.8] in der Form $\omega=f(\phi)$. An der Haltebereichsgrenze erreicht der statische Phasenfehler $\phi_p = \phi(\omega=0)$ seinen Höchstwert am Maximum der Diskriminator-Kennlinie.

Bei dem Näherungsverfahren für verrauschte Eingangssignale wird der Haltebereich zunächst für einen sinusförmigen Störer

$$n'(t) = \hat{n}' \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad (4.46)$$

berechnet. Maßgebend für die Beeinflussung des Haltebereichs durch $n'(t)$ ist neben der Amplitude $\hat{n}'$ die Frequenz ω_n des Störers. Bei sehr tiefen Frequenzen [quasistatischer Fall, $F(s) \approx F(0) = 1$] wird die Störung $n'(t)$ durch die Regelung über ein gegenphasiges Signal $g'(\varphi)$ kompensiert mit einer entsprechend großen Änderung von φ (s. Bild 3.6a). Erreicht φ das Maximum der Kennlinie g' , so ist die Haltebereichsgrenze erreicht, die Synchronisation geht verloren. Frequenzen ω_n , die oberhalb der PLL-Rauschbandbreite liegen, bewirken (wegen Kreisfilter und Integration im VCO) eine vernachlässigbare Auslenkung von φ und haben daher keinen Einfluß auf den Haltebereich.

Entsprechend wird für einen niederfrequenten harmonischen Störer (quasistatisch) abhängig von der Amplitude $\hat{n}'$ diejenige maximale Verstimmung gesucht, für welche noch Synchronisation herrscht. Im quasistatischen Fall wird die Übertragungsfunktion des Kreisfilters $F(j\omega_n) = F(0) = 1$, und die Systemgleichung (3.47) wird von 1. Ordnung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Delta\Omega - \omega_s g'(\varphi) - \omega_s \hat{n}' \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad (4.47)$$

Stellt man diese wegen $g'(\varphi)$ nichtlineare Differentialgleichung als Phasendiagramm dar, so kann die Haltebereichsgrenze $\Delta\Omega_H$ sofort als diejenige maximale Verstimmung abgelesen werden (s. Bild 4.2), für die noch Schnittpunkte bzw. Berührungspunkte mit der Abszisse $\omega = 0$ entstehen, das System also noch stets synchronisiert bleibt. Man erhält

$$\Delta\Omega_H = \omega_s [\max\{g'(\varphi)\} - \hat{n}'] \quad (4.48)$$

In einem weiteren Schritt wird nun der Zusammenhang zwischen dem Effektivwert der rauschartigen Störung und der Amplitude $\hat{n}'$ des harmonischen Störers gesucht. Hierzu wird angenommen,

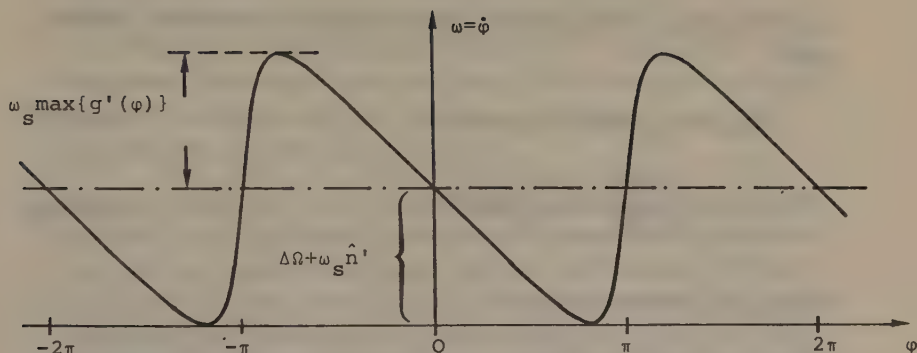


Bild 4.2 Phasendiagramm zur Berechnung des Haltebereichs

daß die näherungsweise weiße Rauschstörung $n'(t)$ mit der Rauschleistungsdichte N'_0 nur mit ihren Anteilen im Bereich der PLL-Rauschbandbreite den Haltebereich entsprechend der vorangegangenen Überlegung beeinflusst. Im Rahmen des Näherungsverfahrens genügt es dabei, die Rauschbandbreite f_{RL} des durch Linearisierung von $g'(\phi)$ vereinfachten Modells (Bild 3.9) zugrunde zu legen. Für einen passiven PI-Regler gilt entsprechend Tab.2.1 und Abschnitt 3.6.2:

$$\frac{f_{RL}}{f_R} = \frac{g'_0 (1 + g'_0 K) (1 + K/m)}{(1 + K) (1 + g'_0 K/m)} \quad (4.49)$$

Wird nun die Rauschleistung innerhalb der Bandbreite f_{RL} der Leistung $\hat{n}'^2/2$ des harmonischen Störers gleichgesetzt, so wird

$$\frac{\hat{n}'^2}{2} = N'_O \cdot 2 f_{RL} = \frac{\overline{n}'^2}{B_1} \cdot 2 f_{RL} \quad (4.50)$$

Damit kann der Haltebereich näherungsweise berechnet werden nach:

$$\Delta\Omega_H = \omega_S [\max\{g'(\varphi)\} - \hat{n}'] \quad (4.51a)$$

$$\hat{n}' = \sqrt{\frac{\overline{n}'^2}{B_1/B_1} \cdot 4v \frac{f_{RL}}{f_R}} \quad (4.51b)$$

mit f_{RL}/f_R nach Gl.(4.49).

Aus Gl.(4.51a) geht hervor, daß der Haltebereich durch Rauschen verkleinert wird. Dies läßt sich auch anschaulich erklären: Bei zunehmender Verstimmung $\Delta\Omega$ wächst der statische Phasenfehler φ_p von Null aus bis in die Nähe des Maximums der Kennlinie. Dort genügen bereits kleine Rauschstörungen um Phasensprünge über das Maximum der Kennlinie hinweg einzuleiten (s. "Wellblechmodell", Abschn. 2.3). Ein erneutes Einfangen wird dann wegen der Hysterese zwischen Halte- und Fangbereich (s. unten) verhindert, der Regelkreis bleibt unsynchronisiert.

4.3.2 Die Berechnung des Fangbereiches

Für die Berechnung des Fangbereiches bei unverrauschten Signalen sind aus der Literatur mehrere Näherungsansätze bekannt. Abgesehen von numerischen Lösungen lassen sich diese Verfahren einem der drei folgenden Grundgedanken zuordnen:

- Das Verfahren der harmonischen Analyse [31,32], wobei der Regelkreis mit einem Ansatz für den Zeitverlauf der Differenzfrequenz $\omega(t)$ in Gleichanteil und Grundwelle einmal durchgerechnet und das Ergebnis mit dem ursprünglichen An-

satz verglichen wird. Diese Methode eignet sich jedoch praktisch nur für sinusförmige Kennlinien.

- Die Berechnung mit Hilfe des Phasendiagramms [33,34,35]. Damit läßt sich für stückweise lineare Kennlinien (Dreieck, Sägezahn) bei erhöhtem Aufwand der Fangbereich exakt berechnen. Das Verfahren ist jedoch stark an die spezielle Form der Nichtlinearität gebunden und eignet sich nicht für allgemeine Kennlinien $g'(\varphi)$.
- Die Approximation des Kreisfilterfrequenzgangs [35,36,37], die für einen passiven PI-Regler in einem eingeschränkten Bereich der Dimensionierung, nämlich für große $\omega_s T$, möglich ist. In [35] wird gezeigt, daß sich dabei die exakten asymptotischen Grenzwerte des Fangbereichs praktisch bereits für $\omega_s T > 4$ ergeben, was bei üblichen Dimensionierungen in der Regel erfüllt ist ("high gain loops" mit $\omega_s T \gg 1$) [10].

Von den drei Konzepten eignet sich als einziges die Approximation des Filterfrequenzgangs nach der in [35] beschriebenen Methode für die Anwendung des PLL-Ersatzmodells mit allen Kennlinien $g'(\varphi)$. Es wird daher im folgenden der Fangbereich - zunächst mit harmonischem und in Erweiterung mit stochastischem Störer - unter Verwendung des Rauschersatzschaltbildes 3.6a mit vereinfachtem Kreisfilter näherungsweise berechnet.

Im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen geht man bei der Berechnung des Fangbereichs zunächst vom unsynchronisierten Betrieb des PLL aus. Es besteht dann eine Differenzfrequenz $\omega(t)$ zwischen dem VCO-Signal und dem Referenzsignal, die auch im Mittel ungleich Null ist. Der Betrag des Phasenfehlers φ nimmt dabei stetig zu, so daß die periodische nichtlineare Modellkennlinie $g'(\varphi)$ kontinuierlich durchlaufen wird. Die Basisbandsignale im Regelkreis sind entsprechend nichtlinear verzerrte periodische Zeitfunktionen. Bei Verkleinerung der

Verstimmung $\Delta\Omega$ verringert sich die Differenzfrequenz ω im Mittel und die Periodendauer wächst. Schließlich wird die Fangbereichsgrenze $\Delta\Omega_F$ erreicht, die definiert wird als Minimalwert der Verstimmung $\Delta\Omega$, für welche der Regelkreis unsynchronisiert bleibt. Eine infinitesimale Verringerung $\Delta\Omega < \Delta\Omega_F$ führt dann zum Einfangen.

Die vollständige Berechnung des Fangbereichs mit Hilfe des allgemeinen Modells in Bild 3.6a scheitert für den passiven PI-Regler an der Nichtlinearität des Regelkreises. Man kann die Systemgleichung bzw. das Modell jedoch nach den folgenden Überlegungen vereinfachen:

Das nichtlinear verzerrte periodische Zeitsignal $u_o(t)$, das im unsynchronisierten Betrieb am Diskriminatorausgang erscheint, besteht aus Gleichanteil $\overline{u_o}$, Grundwelle und höheren Harmonischen. Wenn die Kreisfrequenz der Grundwelle (und damit aller höheren Harmonischen) dabei stets größer als die zweite Eckfrequenz $\omega_{g2} = 1/T$ des passiven PI-Kreisfilters ist (s. Bild 2.3), dann kann die vollständige Filterübertragungsfunktion ersetzt werden durch einen konstanten Übertragungsfaktor $m \leq 1$ (Teilerfaktor) für die Gleich- und Wechselanteile und die additive Ergänzung des mit $(1-m)$ multiplizierten Gleichanteils $\overline{u_o}$ (s. Bild 4.4).

Für die Rauscheinspeisung $n'(t)$ im allgemeinen Modell Bild 3.6a wird, wie bei der Haltebereichsberechnung, zunächst ein harmonischer Störer

$$n'(t) = \hat{n}' \cos(\omega_n t + \psi_n) \quad (4.46)$$

angesetzt. Man kann nun im Modell Bild 3.6a den Summationspunkt für die Störeinspeisung $n'(t)$ nach rechts über den linearen Teil des Regelkreises verschieben und mit dem Summationspunkt für die konstante Verstimmung $\Delta\Omega$ zusammenfallen lassen. Auf diese Weise werden beide Systemerregungen zu einer zeitab-

hängigen resultierenden Gesamtverstimmung $\Delta\Omega_{\text{ges}}(t)$ zusammengefaßt, die sinusförmig mit der Frequenz ω_n und der Amplitude $\hat{n}'\omega_s |F(\omega_n)|$ (s. Bild 3.6a) um den konstanten Mittelwert $\Delta\Omega$ verläuft (Frequenzwobbelung mit dem Wobbelhub $\hat{n}'\omega_s |F(\omega_n)|$, s. Bild 4.3). Die tatsächliche Fangbereichsgrenze $\Delta\Omega = \Delta\Omega_F$

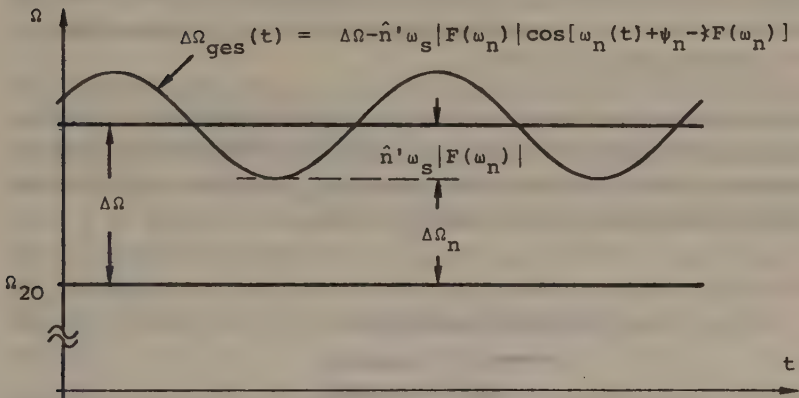


Bild 4.3 Zur Veranschaulichung der resultierenden Gesamtverstimmung bei harmonischem Störer $n'(t)$

(d.h. bei Berücksichtigung der Störung) ergibt sich dann, wenn der Minimalwert $\Delta\Omega_n$

$$\Delta\Omega_n = \Delta\Omega - \hat{n}'\omega_s |F(\omega_n)| \quad (4.52)$$

der resultierenden Gesamtverstimmung $\Delta\Omega_{\text{ges}}(t)$ die natürliche Fangbereichsgrenze (d.h. diejenige Frequenzverstimmung, die für das Einlaufen in die Synchronisation mindestens erforder-

lich ist) erreicht, so daß der Fangbereich $\Delta\Omega_F$ durch die Störung also grundsätzlich vergrößert wird. Diese Überlegung gilt exakt nur für tiefe Störfrequenzen (quasistatischer Fall). Da aber die Störung gemäß Gl.(4.52) entsprechend dem Kreisfilterfrequenzgang $|F(\omega)|$ mit zunehmender Frequenz ω_n stark gedämpft wird, ist für eine Beeinflussung des Fangbereichs im wesentlichen nur der niedrige Frequenzbereich unterhalb der zweiten Kreisfiltereckfrequenz (s.Bild 2.3) maßgebend, so daß hier der quasistatische Fall zugrundegelegt wird (s. auch experimentelle Bestätigung in [49]).

Zur Berechnung des Fangbereichs $\Delta\Omega = \Delta\Omega_F$ mit Störer $n'(t)$ wird demnach insgesamt das Modell in Bild 4.4 verwendet, in dem die maßgebende resultierende Verstimmung $\Delta\Omega_n$ und der vereinfachte Filterfrequenzgang berücksichtigt sind.

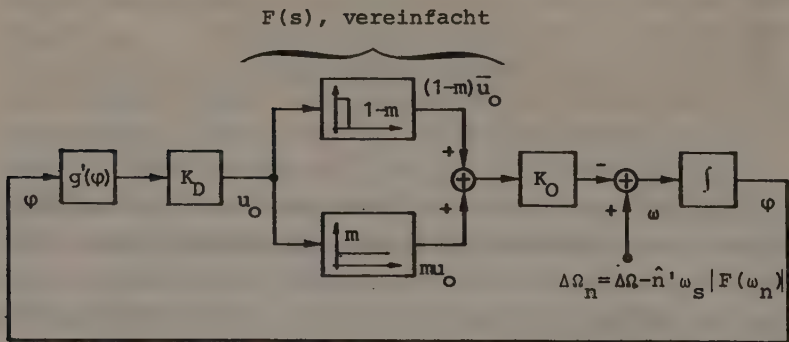


Bild 4.4 Nichtlineares PLL-Modell zur Fangbereichsberechnung

Mit der Abkürzung für die konstanten Anteile

$$\Delta\Omega_n^* = \Delta\Omega_n - (1-m)\omega_s \overline{g'(\varphi)} \quad (4.53)$$

entspricht das Ersatzmodell des dynamischen Vorgangs der Differentialgleichung

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \Delta\Omega_n^* - m\omega_s g'(\varphi) \quad , \quad (4.54)$$

die somit als nichtlineare Systemgleichung eines PLL 1.Ordnung mit der statischen Regelsteilheit $m\omega_s$ und der resultierenden Verstimmung $\Delta\Omega_n^*$ interpretiert werden kann.

Der Fangbereich $\Delta\Omega = \Delta\Omega_F$ bei Berücksichtigung der Störung ergibt sich dann aus dem Minimalwert für $\Delta\Omega_n$, für welchen die Gleichungen (4.52) bis (4.54) mit $\bar{\omega} \neq 0$ erfüllt sind. Im Einzelnen wird dazu wie folgt verfahren: Aus Gl.(4.54) wird der Mittelwert $\bar{\omega}$ in Abhängigkeit von $\Delta\Omega_n^*$ berechnet. Andererseits wird die Hilfsvariable $\Delta\Omega_n^*$ mit Gl.(4.53) als Funktion von $\bar{\omega}$ und $\Delta\Omega_n$ ausgedrückt. Man erhält so ein System von zwei Gleichungen mit den Parametern $\bar{\omega}$ und $\Delta\Omega_n^*$, das für minimales $\Delta\Omega_n$ gelöst wird.

Dementsprechend wird zunächst Gl.(4.54) nach Trennung der Variablen über eine Periode T_p von $\omega(t)$ bzw. über eine Periode 2π von $\omega(\varphi)$ integriert

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\Omega_n^* - m\omega_s g'(\varphi)} = \int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = T_p = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \quad (4.55)$$

Dabei wurde die allgemeine Beziehung zwischen Periodendauer T_p und Mittelwert $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} \omega(t) dt = \frac{1}{T_p} [\varphi(t_0+T_p) - \varphi(t_0)] = \frac{2\pi}{T_p} \quad (4.56)$$

verwendet.

Andererseits erhält man für die Hilfsvariable $\Delta\Omega_n^*$ aus Gl. (4.53) nach Mittelwertbildung von Gl. (4.54):

$$\Delta\Omega_n^* = m\Delta\Omega_n + (1-m)\bar{\omega} \quad (4.57)$$

Führt man die Normierungen

$$\frac{\bar{\omega}}{m\omega_s} = x \quad ; \quad \frac{\Delta\Omega_n^*}{m\omega_s} = y \quad ; \quad \frac{\Delta\Omega_n}{\omega_s} = \gamma_n \quad (4.58a,b,c)$$

ein, so hat das System von zwei Gleichungen, welches zur Berechnung des Fangbereichs für minimales $\Delta\Omega_n$ bzw. γ_n gelöst werden muß, die folgende Form:

$$x = 2\pi \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{y - g'(\varphi)} \right]^{-1} \quad (4.59a)$$

$$y = \gamma_n + (1-m)x \quad (4.59b)$$

Die Berechnung des Minimums γ_n derart, daß beide Gleichungen erfüllt sind, geschieht entweder formal, z.B. mit der Multiplikatorenmethode von Lagrange [27], oder anschaulicher aus der Darstellung der Gleichungen (4.59a) und (4.59b) als

$$x = f(y) \quad (4.60a)$$

$$x = \frac{1}{1-m} y - \frac{\gamma_n}{1-m} \quad (4.60b)$$

γ_n erreicht seinen Extremwert, wenn im Berührungspunkt die Steigung $df(y)/dy$ mit der Steigung $1/(1-m)$ der Geraden Gl. (4.60b) übereinstimmt (s. Bild 4.5):

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{1}{1-m} \quad (4.61)$$

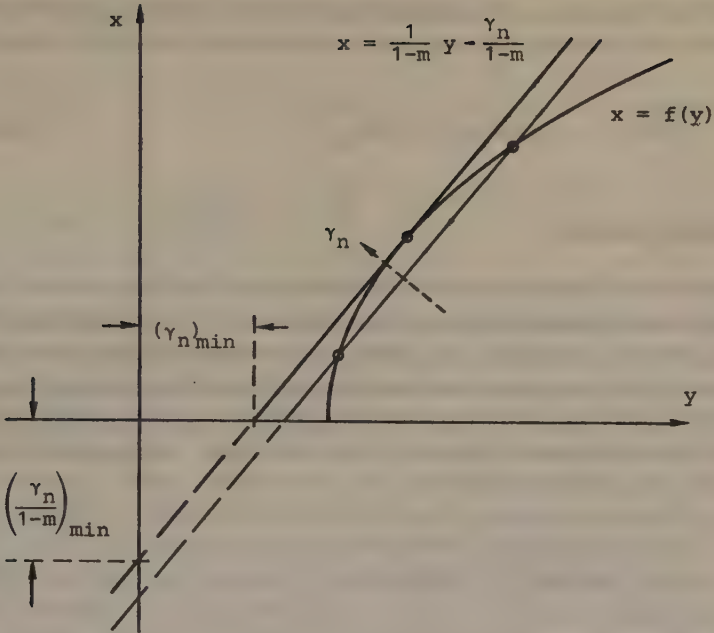


Bild 4.5 Zur Berechnung des Minimums der normierten Gesamtverstimung γ_n . Wenn die Gerade die Kurve $f(y)$ tangiert, wird γ_n minimal

Die Differentiation von Gl.(4.59a) und die Umstellung von Gl.(4.61) liefern:

$$m = 1 - \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{y-g'(\varphi)}]^2}{2\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{[y-g'(\varphi)]^2}} \quad (4.62)$$

Bei Vorgabe von y und Berechnung von $m \leq 1$ nach Gl.(4.62) und x nach Gl.(4.59a) kann nun der Fangbereich aus Gl.(4.59b) zu

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_s} = y - (1-m)x + \hat{n}' |F(\omega_n)| \quad (4.63)$$

bestimmt werden.

Wie bei der Berechnung des Haltebereichs wird nun wieder eine äquivalente Rauschleistung zur Leistung des harmonischen Störers gesucht. Da hier (s. oben) nur Frequenzanteile des Rauschens $n'(t)$ entsprechend dem Kreisfilterfrequenzgang zu einer Vergrößerung des Fangbereichs gemäß Gl.(4.63) führen, wird die Rauschleistung innerhalb der wie folgt definierten Kreisfilter-Rauschbandbreite f_R^*

$$f_R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi f_{RL}} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.64)$$

bestimmt (Integrationsgrenze $2\pi f_{RL}$ mit f_{RL} nach Gl.4.49, da Störanteile höchstens bis zur PLL-Rauschbandbreite interessieren).

Für kleine m und für das passive PI-Glied ergibt die Integration näherungsweise

$$\frac{f_R^*}{f_R} \approx \frac{m}{1+K} + m^2 \frac{f_{RL}}{f_R} \quad (4.65)$$

Der vom harmonischen Störer verursachte Summand in Gl.(4.63) wird also ersetzt gemäß:

$$\frac{\hat{n}'^2}{2} |F(\omega_n)|^2 = N_O' \cdot 2f_R^* = \frac{\overline{n'^2}}{B_1'} \cdot 2f_R^* \quad (4.66)$$

und der Fangbereich mit Rauschen berechnet sich aus:

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_s} = y - (1-m)x + \hat{n}' |F(\omega_n)| \quad (4.67a)$$

$$\hat{n}' |F(\omega_n)| = \sqrt{\frac{n'^2}{B_1'/B_1}} 4v \frac{f_R^*}{f_R} \quad (4.67b)$$

Die Parameter y , x und m sind mit Hilfe der Gleichungen (4.62) und (4.59) zu berechnen, während sich die Größen in Gl.(4.67b) als Funktionen von $(SNR)_1$ aus Tab.3.1 für die einzelnen Diskriminator-Realisierungen ergeben.

Die Störung n' geht additiv in die Bestimmungsgleichung für den Fangbereich ein und vergrößert damit generell den Fangbereich. Da die Störung wie eine Wobbelung der VCO-Frequenz wirkt, kann der PLL dadurch vom stabilen asynchronen Zustand in die Synchronisation gebracht werden, ähnlich wie bei dem bekannten Verfahren, wonach zur Unterstützung des Einfangens die VCO-Frequenz gewobbelt wird [10].

4.4 Das Störverhalten von PLL-FM-Demodulatoren

Der Phasenregelkreis in der Form des Blockschaltbildes 2.1 eignet sich unmittelbar zur Demodulation frequenzmodulierter Sendesignale u_1 . Dabei stellt im wesentlichen die Steuerspannung u_3 des VCO das demodulierte NF-Signal dar, da sie die Aufgabe hat, die VCO-Frequenz auf die modulierte Eingangsfrequenz nachzuführen. Hinsichtlich des Störverhaltens weist der PLL-Demodulator gegenüber dem konventionellen FM-Demodulator (Anordnung, die ohne Rückkoppelung den Differentialquotienten der Demodulator-Eingangsphase gewinnt; z.B. Begrenzer-Bandpaß-Differenzierer-AM-Demodulator [z.B.38]) den Vorteil einer verbesserten Demodulatorschwelle auf [38,39,40,41].

Bei der folgenden Berechnung wird wie in Abschnitt 4.1 die in der Praxis häufig verwendete und nach der linearen Theorie optimale Struktur [42], nämlich der PLL 2.Ordnung mit aktivem PI-Regler zugrundegelegt.

4.4.1 Das PLL-FM-Demodulatorsystem

In Bild 4.6 ist das Blockschaltbild des gesamten Demodulationssystems dargestellt.

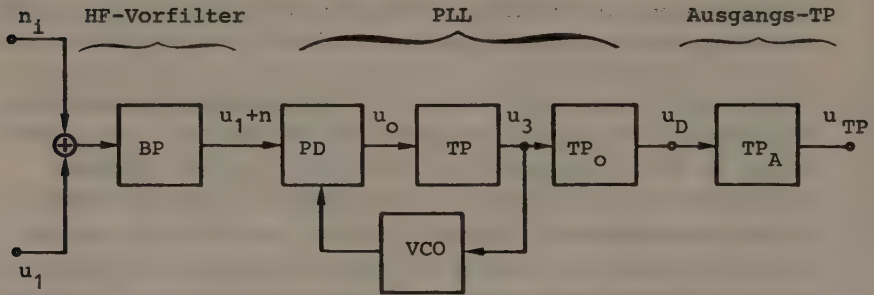


Bild 4.6 Blockschaltbild des PLL-FM-Demodulationssystems

Das Übertragungsverhalten des Systems wird am Beispiel einer mit einem sinusförmigen Testsignal frequenzmodulierten Sendespannung u_1 untersucht. Dabei ist die Frequenz f_m des aufmodulierten NF-Signals gleich der oberen Grenzfrequenz des zu übertragenden Basisbandes. Mit dem Kreisfrequenzhub M und dem Modulationsindex

$$\eta = \frac{M}{\omega_m} \quad (4.68)$$

gilt für die Frequenzabweichung $\Omega_1 = d\phi_1/dt$ bzw. die Phase ϕ_1 (s. Gl.2.1) des Sendesignals:

$$\Omega_1(t) = M \cos(\omega_m t + \psi_m) \quad (4.69)$$

$$\phi_1(t) = n \sin(\omega_m t + \psi_m) \quad (4.70)$$

Auf dem Übertragungsweg wird - wie bisher - weißes Rauschen n_1 eingekoppelt und im Bandpaß des HF-Vorfilters auf die Bandbreite B_1 eingegrenzt. Die Bandbreite des HF-Vorfilters muß für eine ausreichend verzerrungsfreie Demodulation mindestens so groß sein wie die Bandbreite des frequenzmodulierten Sendesignals gemäß der Carson-Regel [38]

$$B_1 = 2f_m(n+1) \quad (4.71)$$

gegebenenfalls zusätzlich ergänzt durch eine Frequenzablage $\Delta\Omega/2\pi$.

Die Frequenzdemodulation wird durch den PLL in Bild 4.6 vorgenommen, wobei die VCO-Steuerspannung nach einer Filterung im Kompensationsfilter (TP_O)

$$F_O(s) = \frac{1}{1+sT} \quad (4.72)$$

die demodulierte Spannung u_D darstellt. Das Kompensationsfilter hat lediglich die Aufgabe, die Nullstelle in der Übertragungsfunktion $G(s)$ des PLL 2.Ordnung zu kompensieren, so daß für die Demodulation ein maximal flacher Frequenzgang (für $D=1/\sqrt{2}$) realisiert werden kann.

Der Störabstand des demodulierten Signals u_D läßt sich noch durch Nachschalten eines Ausgang-Tiefpaß (siehe Bild 4.6) mit der Bandbreite $f_g \geq f_m$ verbessern, insbesondere dann, wenn die Bandbreite des Phasenregelkreises deutlich größer als f_m ist, wie es die Dimensionierung für einen optimalen Schwellwert

erfordert (s. unten).

In Bild 4.7 ist das allgemeine, nichtlineare Ersatzmodell für den FM-Demodulator angegeben mit der Basisbanddarstellung des PLL entsprechend Bild 3.6, wobei $\phi_1(t)$ gemäß Gl. (4.70) hier sinusförmig zeitabhängig ist.

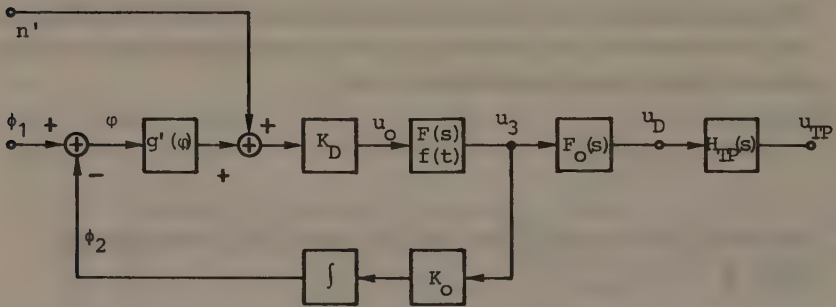


Bild 4.7 Allgemeines nichtlineares Ersatzmodell für den gestörten PLL-FM-Demodulator

Zur Charakterisierung des Demodulatorstörverhaltens werden zusätzlich zum Eingangs-HF-Störabstand $(\text{SNR})_1$, der nach Gl. (2.32) als Quotient aus der Signalleistung am Eingang und der Störleistung in der Bandbreite des HF-Vorfilters definiert ist, folgende Störabstände eingeführt:

$(\text{SNR})_E$: Normierter Eingangs-HF-Störabstand, definiert als Quotient aus der Eingangs-Signalleistung und der Rauschleistung im Basisband

$$(\text{SNR})_E = \frac{\hat{u}_1^2}{2f_m N_0} = (\text{SNR})_1 \frac{B_1}{f_m} \quad (4.73)$$

$(\text{SNR})_A$: Ausgangs-NF-Störabstand, definiert als Quotient aus der NF-Signalleistung und der NF-Rauschleistung am Ausgang u_D bzw. u_{TP}

$$(\text{SNR})_A = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \quad (4.74)$$

4.4.2 Der Störabstand bei großen Signal-Rauschverhältnissen

Im Bereich geringer Störungen ist das Ausgangs-Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_A$ von FM-Demodulatoren über einen linearen Zusammenhang von $(\text{SNR})_E$ abhängig. In diesem linearen Teil der Störabstandskurven $(\text{SNR})_A = f[(\text{SNR})_E]$ ist aufgrund der bekannten Tatsache, daß bei Frequenzmodulation Sendeleistung auf Kosten von Bandbreite eingespart werden kann, eine erhebliche Verbesserung des Störabstandes im Ausgangssignal gegenüber dem Eingangs-Störabstand $(\text{SNR})_E$ möglich. So ist z.B. bei Zweiseitenband-Amplitudenmodulation das Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_A$ am Demodulatorausgang höchstens gleich $(\text{SNR})_E$ [43]. Bei FM wird dagegen für den konventionellen Demodulator unter idealisierten Verhältnissen ein Störabstandsgewinn von

$$(\text{SNR})_A = \frac{3}{2} \eta^2 (\text{SNR})_E \quad (4.75)$$

im linearen Bereich - also oberhalb der Demodulatorschwelle - berechnet [z.B.38].

Da der Schwellwert vom nichtlinearen Systemverhalten herrührt, lassen sich die Störabstandskurven beim PLL-Demodulator im Bereich oberhalb der Schwelle mit dem vereinfachten Modell nach Abschnitt 3.6.2 mit linearisierter Kennlinie ermitteln unter Verwendung der jeweiligen Übertragungsfunktionen. In den folgenden Gleichungen sind diese Übertragungsfunktionen

für die Ausgangsgrößen φ , u_D und u_{TP} aufgeführt, wobei jeweils der vom Eingangsnutzsignal ϕ_1 und von der Rauscheinpeisung n'/g'_O (s. Bild 3.9) herrührende Anteil bezeichnet ist. ($n'(s)$ ist eine formal eingeführte Größe, da eine Laplace-Transformierte des Rauschens $n'(t)$ nicht existiert.)

Ausgang Signalanteil

Rauschanteil

$$\varphi(s) = \phi_1(s) [1 - G_L(s)] - \frac{n'(s)}{g'_O} G_L(s) \quad (4.76)$$

$$U_D(s) = \frac{\Omega_1(s)}{K_O} \underbrace{G_L(s) F_O(s)}_{G_L^{FM}(s)} + \frac{n'(s)}{K_O g'_O} \underbrace{s G_L(s) F_O(s)}_{G_L^{FM}(s)} \quad (4.77)$$

$$U_{TP}(s) = \frac{\Omega_1(s)}{K_O} G_L^{FM}(s) H_{TP}(s) + \frac{n'(s)}{K_O g'_O} s G_L^{FM}(s) \cdot H_{TP}(s) \quad (4.78)$$

Die Demodulatorübertragungsfunktion G_L^{FM} ist dabei explizit (vergl. Tab.2.1 und Abschn. 3.6.2):

$$\begin{aligned} G_L^{FM}(s) &= G_L(s) \cdot F_O(s) = \frac{1}{1 + sT + s^2 T^2 / (g'_O m \omega_s)} \\ &= \frac{g'_O \omega_O^2}{s^2 + 2D\omega_O g'_O s + \omega_O^2 g'_O} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Damit kann nun sowohl am Demodulatorausgang u_D als auch am Tiefpaßausgang u_{TP} das Signal-Geräuschverhältnis $(SNR)_A$ berechnet werden.

Nach Einführung der normierten Eigenfrequenz

$$d = \frac{\omega_O}{\omega_m} \quad (4.80)$$

erhält man aus der Gl. (4.77) am Demodulatorausgang die Signalleistung

$$\begin{aligned}\sigma_s^2 &= \frac{1}{K_o^2} \frac{M^2}{2} |G_L^{FM}(j\omega_m)|^2 \\ &= \frac{1}{K_o^2} \frac{M^2}{2} \frac{g_o'^2 d^4}{1 + (4D^2 g_o'^2 - 2g_o') d^2 + g_o'^2 d^4}\end{aligned}\quad (4.81)$$

und die Rauschleistung

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \frac{1}{K_o^2 g_o'^2} N_o' \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |j\omega G_L^{FM}(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{K_o^2} \frac{N_o' \omega_o^3}{g_o' 4D}\end{aligned}\quad (4.82)$$

Daraus ergibt sich das Signal-Rauschverhältnis am Demodulatorausgang (oberhalb der Schwelle) zu:

$$(SNR)_A^D = \frac{\eta}{\pi} \frac{B_1'/B_1}{n^2} \frac{B_1}{f_m} \frac{g_o'^3 d D}{1 + (4D^2 g_o'^2 - 2g_o') d^2 + g_o'^2 d^4} \quad (4.83)$$

Der Ausgangs-Störabstand kann damit explizit als Funktion von $(SNR)_E$ bei gegebenem Verhältnis B_1/f_m (z.B. nach der Carson-Regel) mit dem Modulationsindex η als Parameter dargestellt werden.

Da der nachgeschaltete Ausgangs-Tiefpaß in Bild 4.6 zweckmäßig mit scharfer Bandbegrenzung gewählt wird, genügt es zur Berechnung der Störleistung am Ausgang u_{TP} die Gl. (4.82) mit der Tiefpaß-Grenzfrequenz $\omega_g \geq \omega_m$ als neue Integrations-

grenze zu lösen [17]. Man kann weiterhin annehmen, daß der Betrag des Tiefpaß-Frequenzgangs im Bereich der Basisbandbreite konstant gleich Eins ist, so daß die Signalleistung gegenüber Gl.(4.81) unverändert bleibt. Als Ergebnis für den Störabstand am Tiefpaßausgang erhält man

$$(\text{SNR})_A^{\text{TP}} = (\text{SNR})_A^{\text{D}} \cdot G_{\text{TP}} \quad (4.84a)$$

mit dem Tiefpaß-Gewinnfaktor G_{TP} und der normierten Grenzfrequenz z_g :

$$\frac{1}{G_{\text{TP}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{g'_0 D}{\sqrt{g'_0 (1-g'_0 D^2)}} \ln \frac{z_g^2 + g'_0 - 2z_g \sqrt{g'_0 (1-g'_0 D^2)}}{z_g^2 + g'_0 + 2z_g \sqrt{g'_0 (1-g'_0 D^2)}} \quad (4.84b)$$

$$- \frac{1}{\pi} \arctan \frac{2g'_0 D z_g}{z_g^2 - g'_0} ; \quad z_g < \sqrt{g'_0}$$

$$z_g = \frac{\omega_g}{\omega_0} \quad (4.85)$$

Zweckmäßigerweise ist die Grenzfrequenz ω_g deutlich kleiner als die PLL-Eigenfrequenz (s. Abschn.5.5.1). In diesem Fall gilt bei der Berechnung der Störleistung in guter Näherung für die PLL-FM-Übertragungsfunktion $|G_L^{\text{FM}}| = 1$ im Bereich $|\omega| \leq \omega_g$. Der Gewinnfaktor wird dann einfach

$$G_{\text{TP}}(z_g \ll 1) = \frac{3\pi g'_0}{4D} \frac{1}{z_g} \quad (4.86)$$

Unter derselben Voraussetzung kann dann auch wegen $\omega_m \leq \omega_g$ bei der Berechnung der Signalleistung in Gl.(4.81) der Einfluß des Frequenzgangs durch die Näherung $|G_L^{\text{FM}}(j\omega_m)| = 1$ vernachlässigt werden und man erhält:

$$(\text{SNR})_A^{\text{TP}} (z_g \ll 1) = \frac{g_o'^2 (B_1'/B_1)}{2n'^2} \frac{B_1}{f_m} \left(\frac{f_m}{f_g} \right)^3 \frac{3}{2} \eta^2 \quad (4.87)$$

Hieraus wird deutlich, daß sich auch für den PLL-Demodulator bei der zusätzlichen Annahme $f_g = f_m$ und bei Gesamtlinearisierung (s. Abschn. 3.6.3) das für den konventionellen FM-Demodulator unter denselben Voraussetzungen gültige Gesetz Gl. (4.75) ergibt.

4.4.3 Näherungsweise Berechnung der Demodulatorschwelle

Unterschreitet der Eingangs-Störabstand den Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ bzw. $(\text{SNR})_{1\text{SW}}$, so verschlechtert sich das Signal-Rauschverhältnis des demodulierten Signals gegenüber den aus dem linearisierten Modell abgeleiteten Beziehungen in Abschnitt 4.4.2. Da diese Verschlechterung von $(\text{SNR})_A$ abrupt einsetzt, wird hieraus üblicherweise [39,41] eine quantitative Definition abgeleitet: Der Schwellwert ist derjenige Eingangs-Störabstand $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ bzw. $(\text{SNR})_{1\text{SW}}$, für welchen das Ausgangs-Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_A$ um 1dB gegenüber der für das linearisierte Modell (Gesamtlinearisierung) berechneten Geraden abfällt (s. Bild 4.8).

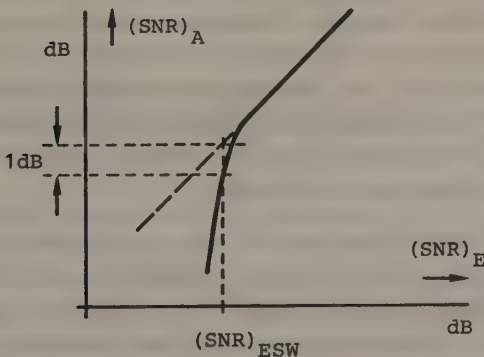


Bild 4.8 Zur Definition der FM-Demodulatorschwelle

Die Entstehung der Demodulatorschwelle wird beim PLL-FM-De-
modulator verursacht durch die Aussteuerung der Kennlinie
 $g'(\varphi)$ über ihren linearen Bereich hinaus. Zur Berechnung des
abfallenden Verlaufs des Ausgangs-Störabstandes in der Nähe
und unterhalb der Schwelle müssen daher nichtlineare Berech-
nungsverfahren herangezogen werden.

Eine Lösung über den Ansatz der Fokker-Planck-Gleichung für
das hier behandelte System 2.Ordnung mit Eintonmodulation
scheint nicht möglich [8]. Für den PLL mit Sinus-Phasendis-
kriminators ohne Begrenzer wird der Störabstandsverlauf in
[44,45] näherungsweise mit Hilfe einer Abschätzung der von
den unterhalb der Schwelle auftretenden 2π -Phasensprüngen ver-
ursachten zusätzlichen Störleistung berechnet. Ebenfalls für
die Sinuskennlinie ohne Begrenzer wird in [42] ein quasiline-
ares Berechnungsverfahren angegeben, mit dem der Verlauf von
 $(\text{SNR})_A$ bis in Schwellennähe näherungsweise berechnet, und der
Regelkreis - allerdings mit großem numerischen Aufwand - opti-
miert werden kann.

Eine sehr große Genauigkeit ist von beiden Berechnungsverfah-
ren nicht zu erwarten. Die Häufigkeit von 2π -Phasensprüngen
wird in [44,45] nämlich nur abgeschätzt ohne Berücksichtigung
der Modulation, und bei dem quasilinearen Verfahren nach [42]
können Phasensprünge, die entscheidend sind für den Verlauf
des Störabstandes in Schwellennähe, überhaupt nicht in die
Rechnung einbezogen werden. Da die erwähnten Verfahren zudem
schon für den einfachen Fall des Phasendiskriminators ohne Be-
grenzer zu komplizierten und unübersichtlichen Berechnungen
führen, wird hier für eine Abschätzung der Demodulatorschwelle
nach den folgenden Überlegungen verfahren:

Überschreitet der die Nichtlinearität $g'(\varphi)$ aussteuernde Pha-
senfehler φ , der hier aus einem von der Modulation und einem
vom Rauschen herrührenden Anteil besteht, den linearen Bereich
der Modellkennlinie, so verschlechtert sich das Störverhalten

gegenüber der linearen Rechnung von Abschnitt 4.4.2. Es wird daher für die Varianz σ_{φ}^2 des gesamten Phasenfehlers, bestehend aus Signalanteil φ_s und Rauschanteil φ_n

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_n \quad (4.88)$$

eine Schranke $\sigma_{\varphi SW}^2$ angegeben, die die Grenze des linearen Bereichs festlegt.

Aus der nichtlinearen Behandlung des unmodulierten Phasenregelkreises folgt (s. Abschn. 5.2), daß die Gültigkeitsgrenze für die Linearisierung von $g'(\varphi)$ etwa bei $\sigma_{\varphi}^2 = 0,2$ liegt. Daher wird auch für das modulierte System eine Varianz σ_{φ}^2 des gesamten Phasenfehlers (Signalanteil und Rauschanteil) von $\sigma_{\varphi}^2 = 0,2$ als Grenze des linearen Bereichs angenommen. Abhängig vom Modulationsindex η (Signalhub) wird also der Störabstand $(SNR)_{\text{E}}$, für den sich nach der Berechnung mit linearisierter Modellkennlinie

$$\sigma_{\varphi}^2 = \sigma_{\varphi SW}^2 = 0,2 \quad (4.89)$$

ergibt, als Schwellwert $(SNR)_{\text{ESW}}$ definiert.

Für die Varianz des Phasenfehlers wird der Signalanteil nach Gl. (4.76)

$$\sigma_{\varphi s}^2 = \frac{\eta^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + (4D^2 g_o'^2 - 2g_o') d^2 + g_o'^2 d^4} \quad (4.90)$$

und der Rauschanteil (s. Gl. 4.9)

$$\sigma_{\varphi n}^2 = \frac{\overline{n'^2}}{B_1'} \cdot \frac{1}{g_o'^2} 2f_{\text{RL}} = \frac{\overline{n'^2}}{(B_1'/B_1) g_o'^2} \frac{f_m}{B_1} \pi d \frac{1 + g_o' 4D^2}{2D} \quad (4.91)$$

Setzt man die Summe $\sigma_{\varphi S}^2 + \sigma_{\varphi n}^2$ gleich $\sigma_{\varphi SW}^2$, so gilt an der Demodulatorschwelle folgender Zusammenhang:

$$\frac{\eta^2}{2} \frac{1}{1 + (4D^2 g'_0{}^2 - 2g'_0{}^2) d^2 + g'_0{}^2 d^4} + \quad (4.92)$$

$$+ \frac{\overline{n'^2}}{(B'_1/B_1) \cdot g'_0{}^2} \frac{f_m}{B_1} \pi d \frac{1 + g'_0{}^2 4D^2}{2D} - \sigma_{\varphi SW}^2 = 0$$

Die Größen $\overline{n'^2}$, B'_1 und g'_0 , die die verschiedenen Diskriminatoren beschreiben, sind Funktionen von $(\text{SNR})_1$. Sind die übrigen Parameter gegeben, so kann aus Gl. (4.92) $(\text{SNR})_{1SW}$ oder $(\text{SNR})_{ESW}$ berechnet werden.

Für den Sinus-Phasendiskriminator ohne Begrenzer ergeben sich aus Tab. 3.1 und 3.2 einfache Werte für $\overline{n'^2}$, B'_1 und g'_0 . Der Schwellwert kann deswegen hier explizit mit Gl. (4.92) berechnet werden gemäß:

$$\frac{1}{(\text{SNR})_{ESW}} = \frac{4D}{\pi(1+4D^2)} \left[\sigma_{\varphi SW}^2 \frac{1}{d} - \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{d^5 + (4D^2 - 2)d^3 + d} \right] \quad (4.93)$$

Aus Gl. (4.93) geht hervor, daß der Störabstand an der Schwelle mit wachsendem Modulationsindex η zunimmt. Mit η wächst nämlich der Signalanteil φ_s des Phasenfehlers, so daß sich nach Gl. (4.89) der Rauschanteil - und damit die Eingangs-Rauschleistung - an der Schwelle verringern muß.

4.4.4 Optimierung der Demodulatorschwelle

Mit Gl. (4.92) wird es nun möglich die PLL-Dimensionierungsparameter ω_o (bzw. d) und D so zu bestimmen, daß der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ möglichst klein wird, so daß die nach Gl. (4.83) bzw. (4.84) erzielbare Störabstandsverbesserung bis zu einem entsprechend kleinen Eingangs-Signal-Rauschverhältnis gewährleistet ist.

Dabei ist vor allem die PLL-Bandbreite, gekennzeichnet durch ω_o (bzw. d), der entscheidende Optimierungsparameter. Nach Abschnitt 4.4.3 wird die Summe aus den Leistungen von Signalanteil φ_s und Rauschanteil φ_n an der Demodulatorschwelle konstant gleich $\sigma_{\varphi\text{SW}}^2$. Dimensioniert man den PLL breitbandig, so wird zwar der vom Signal verursachte Phasenfehler minimal, der Rauschanteil wird jedoch überproportional groß. Umgekehrt erreicht bei zu schmalbandiger Dimensionierung der Phasenfehler φ_s den nichtlinearen Bereich der Kennlinie $g'(\varphi)$ schon bei kleinen Störleistungen und entsprechend kleinen φ_n .

In Bild 4.9 ist die Varianz σ_{φ}^2 am Beispiel eines Begrenzer-Diskriminators mit festem $D=1/\sqrt{2}$ grafisch dargestellt in Abhängigkeit von der normierten Eigenfrequenz $d=\omega_o/\omega_m$ und dem Störabstand $(\text{SNR})_E$ (berechnet entsprechend Gl. 4.92). Man erkennt, daß abhängig von d die Varianz σ_{φ}^2 ein Minimum besitzt, bzw. daß es einen Wert $d=d_{\text{opt}}$ gibt, für den bei konstantem $\sigma_{\varphi}^2=\sigma_{\varphi\text{SW}}^2$ der Eingangsstörabstand $(\text{SNR})_E$ minimal wird.

Um den Einfluß sowohl der normierten Bandbreite d als auch des Dämpfungsfaktors D auf die Demodulatorschwelle abschätzen zu können, wurde in Bild 4.10 am Beispiel des PLL ohne Begrenzer nach Gl. (4.93) der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ im Bereich $\leq 30\text{dB}$ in Abhängigkeit von d und D berechnet. Der minimale Schwellwert beträgt hier $(\text{SNR})_{\text{ESW}} = 20,7 \text{ dB}$ und ergibt sich bei etwa $d=d_{\text{opt}} \approx 6$. Man sieht, daß der Optimalwert d_{opt} der normierten Eigenfrequenz kaum vom Dämpfungsfaktor abhängt; außerdem ist

das Minimum für Dämpfungen im Bereich $0,3 \leq D \leq 1$ relativ flach. Daher wird im folgenden der optimale Demodulatorschwellwert in Abhängigkeit von d bei festem $D=1/\sqrt{2}$ (maximal flacher Demodulationsfrequenzgang) gesucht.

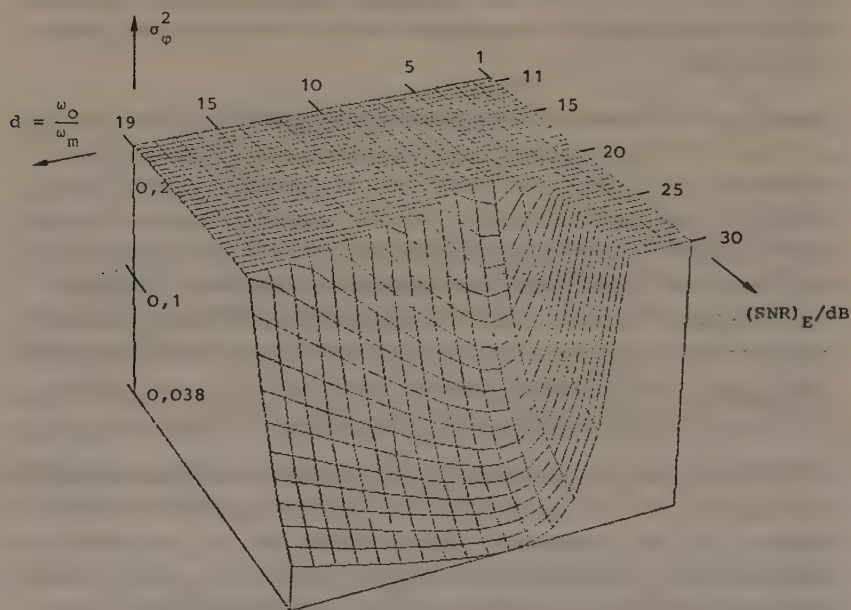


Bild 4.9 3-dimensionale Darstellung der Varianz des Gesamtphasenfehlers. Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie. $D=1/\sqrt{2}$; $\eta=10$; $B_1/f_m=22$

Im allgemeinen Fall wird für die Optimierung aus Gl.(4.92) für einen Wertevorrat von d durch numerische Nullstellensuche für die linke Seite der Gleichung jeweils $(SNR)_{ESW}$ bestimmt. Führt man diese Prozedur noch für verschiedene Werte von η durch, so erhält man als Dimensionierungsvorschrift

die für einen minimalen Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ optimale normierte Eigenfrequenz in Abhängigkeit vom gewählten Modulationsindex (s. Abschn.5.5).

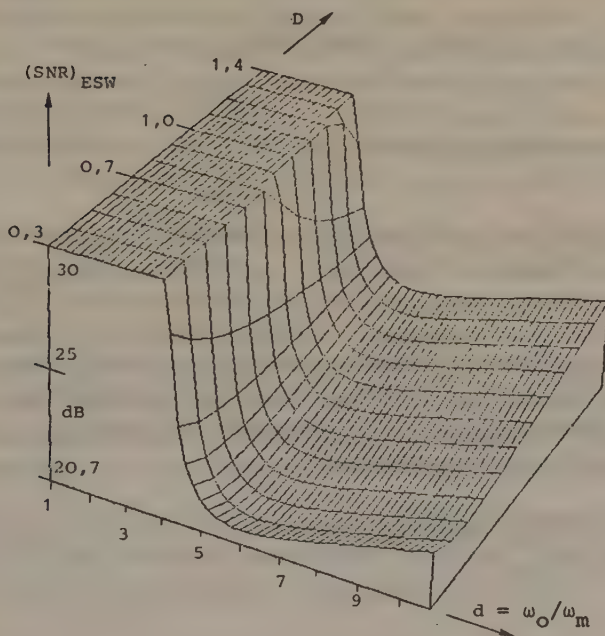


Bild 4.10 3-dimensionale Darstellung des Demodulator-schwellwertes. PD mit Sinuskennlinie ohne Begr.
 $\eta = 10$; $\sigma_{\varphi\text{SW}}^2 = 0,2$

Für den Sonderfall eines Diskriminators ohne Begrenzer läßt sich $d_{\text{opt}} = f(\eta)$ auch geschlossen berechnen. Differenziert man Gl.(4.93) nach d und setzt zur Bestimmung des Extremwertes die Ableitung gleich Null, so ergibt sich $d = d_{\text{opt}}$ allgemein

aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi SW}^2 [d_{\text{opt}}^4 + (4D^2 - 2)d_{\text{opt}}^2 + 1]^2 = \\ = \frac{1}{2} \eta^2 [5 d_{\text{opt}}^4 + 3(4D^2 - 2)d_{\text{opt}}^2 + 1] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Speziell für $D=1/\sqrt{2}$ ergibt die Wurzel

$$d_{\text{opt}} = \left[\frac{5}{4} \frac{\eta^2}{\sigma_{\varphi SW}^2} - 1 + \frac{\eta^2}{\sigma_{\varphi SW}^2} \sqrt{\left[\frac{5}{4} \right]^2 - 2 \frac{\sigma_{\varphi SW}^2}{\eta^2}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.95)$$

den Wert für die normierte Eigenfrequenz, für den der Schwellwert minimal wird. Wegen Gl. (4.89) und mit der (normalerweise erfüllten) Voraussetzung $\eta^2 \gg 0,2$ vereinfacht sich Gl. (4.95) noch und man erhält als Abschätzung:

$$d_{\text{opt}} = \sqrt[4]{\frac{5}{2 \sigma_{\varphi SW}^2}} \sqrt{\eta} = 1,88 \sqrt{\eta} \quad (4.96)$$

5. ANWENDUNG DES ALLGEMEINEN NICHTLINEAREN ERSATZMODELLS FÜR DIE BERECHNUNG DES PLL - STÖRVERHALTENS

Die in Kapitel 4 aufgeführten Verfahren werden im folgenden zur Berechnung des PLL-Störverhaltens für die in Abschnitt 3 behandelten Diskriminator Kennlinien angewendet. Hierfür wurde i.a. eine im Rahmen der Arbeit entstandene Sammlung von Rechnerprogrammen für die einzelnen Kenngrößen des allgemeinen PLL-Ersatzmodells benutzt. Darüberhinaus bieten die grafischen Darstellungen der Modellkenngrößen in Abschnitt 3 eine einfache Möglichkeit, das Störverhalten explizit zu berechnen.

Die Ergebnisse der auf dem allgemeinen Ersatzmodell aufbauenden Berechnungsverfahren werden im folgenden sowohl formelmäßig als auch in Form von anschaulichen grafischen Darstellungen wiedergegeben. Dabei handelt es sich für die Phasenregelkreise mit Begrenzer-Diskriminatoren um völlig neue Ergebnisse, die sich zum Teil erheblich von den für den PLL mit Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer bereits bekannten unterscheiden, die zum Vergleich stets mit aufgeführt werden.

Da es sich hier vorwiegend um Näherungsverfahren handelt, ist eine experimentelle Überprüfung notwendig, um jeweils die Genauigkeit der Ergebnisse abschätzen zu können.

5.1 Meßverfahren für das PLL-Störverhalten

Für experimentelle Untersuchungen wurde eine umfangreiche Meßanordnung aufgebaut, die es gestattet, an einem flexibel dimensionierbaren Phasenregelkreis alle in Abschnitt 4 angesprochenen statistischen Kenngrößen, zum Teil automatisch, mit definierter Genauigkeit zu ermitteln. Dabei wurden die bei der theoretischen Behandlung vorausgesetzten Verhältnisse möglichst gut nachgebildet.

Die gesamte Meßanordnung ist in Bild 5.1 dargestellt. Die Un-

tersuchungen wurden bei der (Träger- bzw. Mitten-)Frequenz $f_{20}=45\text{kHz}$ durchgeführt. Im Phasendiskriminator sind verschiedene Kennlinien und im Kreisfilter (wahlweise aktiver oder passiver PI-Regler oder ohne Filter) verschiedene Werte für m und T einstellbar. Der Referenzsignalgenerator S kann mit dem Funktionsgenerator M beliebig frequenzmoduliert werden. Über einen Bandpaß (HF-Vorfilter) wird das gaußverteilte Störsignal eines Rauschgenerators (N) additiv eingekoppelt.

Die einzelnen Meßverfahren werden im folgenden kurz beschrieben.

Varianz des Phasenfehlers:

Über einen Meß-Phasendiskriminator mit streng linearer Kennlinie in $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (Sägezahncharakteristik) und mit der erforderlichen starken Glättung der hochfrequenten Störanteile (Bessel-Filter 6.Grades) wird der Phasenfehler φ (mod 2π reduziert) in eine proportionale Spannung gewandelt, deren Effektivwert gemessen wird. Wegen der niedrigen Grenzfrequenz von φ und da vereinzelt Phasensprünge auftreten können, reicht die Zeitkonstante handelsüblicher Effektivwertvoltmeter für eine auswertbare Darstellung nicht aus. In einem nachgeschalteten Rechner wird daher über eine beliebige Zeitdauer eine Mittelung der Meßwerte vorgenommen und nach Umrechnung als σ_{φ}^2 ausgedruckt.

Häufigkeit von Phasensprüngen [48]:

Zur automatischen Zählung von 2π -Phasensprüngen, die in einem Zeitintervall von wählbarer Dauer auftreten, wurde ein entsprechendes Meßgerät aufgebaut [48]. Nach Wandlung des Phasenfehlers in eine proportionale Spannung werden die auftretenden Phasensprünge in einem Sprungdetektor zur Weiterverarbeitung in einem Zähler aufbereitet. Mit der Anzeige ist entsprechend der in der Zeitbasis gewählten Zählzeit eine Mittelung

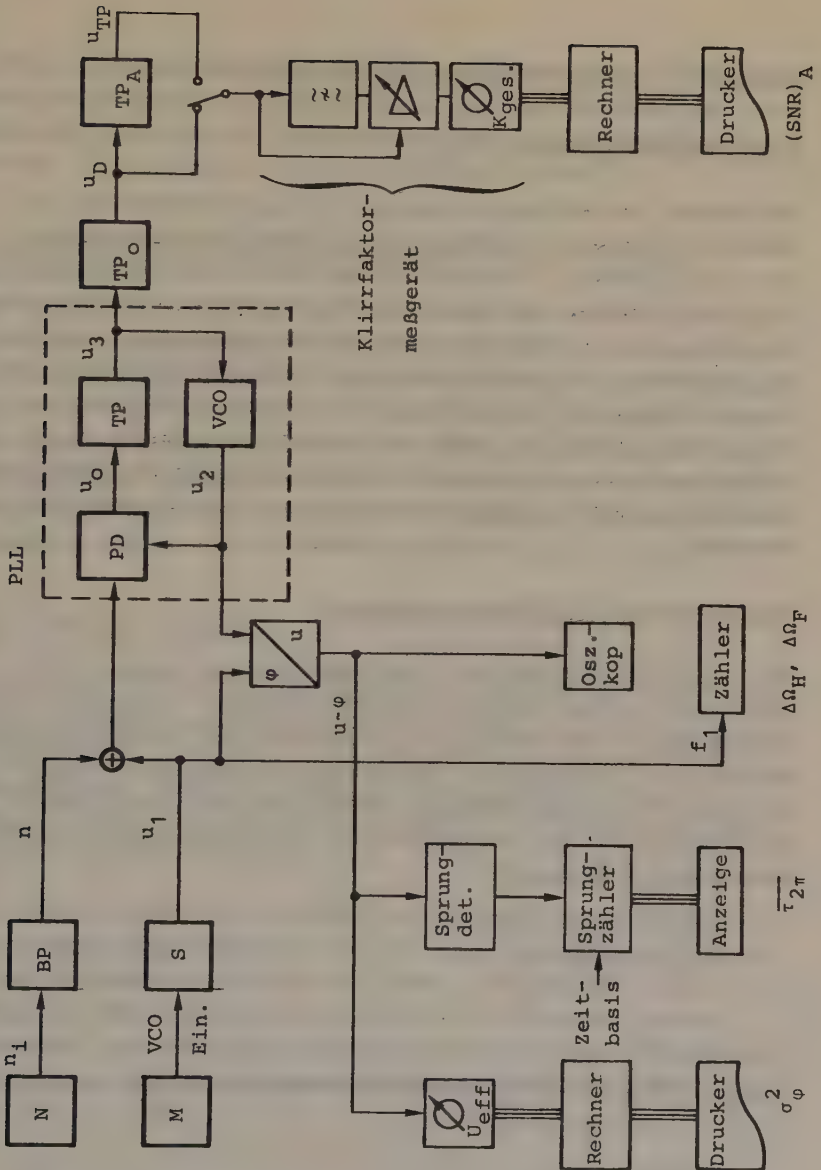


Bild 5.1 Meßanordnung für das PLL-Störverhalten

über bis zu tausend Sprungereignisse möglich.

Fang- und Haltebereich [49]:

Zur Messung des Haltebereiches wird im synchronisierten Zustand die Frequenz des Referenzoszillators langsam erhöht, bis am Oszilloskop an dem zeitlichen Verlauf des Phasenfehlers $\varphi(t)$ das Auftreten von dauernden Phasensprüngen beobachtet werden kann, das die Überschreitung des Haltebereichs kennzeichnet. Umgekehrt wird zur Messung des Fangbereichs im nichtsynchrone Zustand die Verstimmung durch Frequenzänderung des Referenzoszillators so lange verkleinert, bis an der Zeitfunktion $\varphi(t)$ das Erreichen der Synchronisation sichtbar wird. Die entsprechenden Frequenzen werden mit einem Frequenzzähler gemessen.

Störabstand des PLL-FM-Demodulators:

Das Signal-Rauschverhältnis des demodulierten Signals wird - wahlweise vor oder nach dem Ausgangs-Tiefpaß - mit einem Klirrfaktormeßgerät ermittelt, das im wesentlichen aus einem Grundwellenfilter (Bandsperrre), einem Regelverstärker und einem Effektivwertvoltmeter besteht. Dabei wird der Klirrfaktor K_{ges} als Quotient aus den Effektivwerten des Rauschanteils und des Gesamtsignals angezeigt:

$$K_{\text{ges}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}} \quad (5.1)$$

Daraus ergibt sich der Ausgangs-Störabstand (s. Gl.4.74)

$$(\text{SNR})_A = \frac{1}{K_{\text{ges}}^2} - 1 \quad (5.2)$$

Da hier ebenfalls aufgrund von Phasensprüngen in der Nähe der Demodulatorschwelle der angezeigte Wert des Klirrfaktors stark schwankt, erfolgt eine Mittelung und die Auswertung in einem Rechner, so daß direkt $(\text{SNR})_A$ ausgedruckt wird.

5.2 Berechnung und Messung der Varianz des Phasenfehlers

Die Berechnungsverfahren für die Varianz und die Verteilungsdichte des Phasenfehlers wurden für den PLL 1. und 2.Ordnung in verschiedenen Genauigkeitsstufen in Abschnitt 4.1 zusammengestellt. Dabei läßt sich ein quantitativer Vergleich der Berechnungsverfahren und der Meßergebnisse aus der Angabe von σ_φ^2 wesentlich besser als aus der Form von $p(\varphi)$ ableiten. Daher wird im folgenden bevorzugt die Varianz σ_φ^2 behandelt (für eine Darstellung und ein Meßverfahren für $p(\varphi)$ s.[9]).

5.2.1 Der PLL 1.Ordnung

In der Tabelle 5.1 ist für den Kreis 1.Ordnung für alle behandelten Diskriminator-Kennlinien formelmäßig die Varianz des Phasenfehlers angegeben. Die grafischen Darstellungen dieser Zusammenhänge in Abhängigkeit von der normierten Rauschleistung $1/\alpha$ mit dem Bandbreitenverhältnis v als Parameter zeigen die Bilder 5.2 bis 5.5.

Bei einer Näherung entsprechend der Gesamtlinearisierung gilt der lineare Zusammenhang Gl.(4.10), wobei vorausgesetzt wird, daß das Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_1$ so groß ist, daß die Kenngrößen des allgemeinen PLL-Modells die asymptotischen Grenzwerte nach Gl.(3.55) und Gl.(3.56) erreichen. Als Gültigkeitsbereich dieser Näherung soll demnach etwa (s. Bild 3.4 und 3.5)

$$(\text{SNR})_1 > 10 \quad (5.3)$$

angenommen werden.

Aus der Gl.(4.9) erhält man jeweils die Beziehung in Tabelle 5.1 bei Linearisierung der Modellkennlinie. Die Gültigkeitsgrenze dieser verbesserten Näherung hängt im wesentlichen von der Aussteuerung φ der Kennlinie ab und ergibt sich aus dem Vergleich der Ergebnisse für σ_{φ}^2 mit der genaueren nichtlinearen Rechnung (s. Bild 5.2 bis 5.5) etwa zu

$$\sigma_{\varphi}^2 < 0,2 \quad . \quad (5.4)$$

Nach der quasilinearen Näherung mit der äquivalenten Verstärkung ergibt sich die Varianz des Phasenfehlers, wie in den Bildern 5.2 bis 5.5 dargestellt, i.a. aus einer numerischen Iteration nach den Gleichungen in Tabelle 5.1. Entsprechend der verbesserten Näherung wird der exakte Verlauf (Meßwerte) besser approximiert.

Die genauesten Ergebnisse liefert die nichtlineare Berechnung mit der Fokker-Planck-Gleichung, wonach allgemein für die Verteilungsdichte $p(\varphi)$ die Gl.(4.19) und für die Varianz σ_{φ}^2 die Gl.(4.20) gilt.

Für sinusförmige Modellkennlinien kann die Integration in Gl. (4.19) geschlossen berechnet werden: Für den Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie mit dem Potential $G'(\varphi)$ entsprechend Tabelle 3.1 wird z.B.

$$p(\varphi) = \left[\int_{-\pi}^{+\pi} e^{a\mu_1 \cos \varphi} d\varphi \right]^{-1} e^{a\mu_1 \cos \varphi} \quad (5.6)$$

Das Produkt $a\mu_1$ (s. Gl.4.15) ist gerade der Kehrwert der bei linearisierter Kennlinie berechneten Varianz σ_{φ}^2 und wird deshalb mit α_L bezeichnet:

Sinus-PD ohne Begrenzer	Gesamt- linear.	Linearisierung	Quasilinearisierung	Fokker-Planck-Methode
Begrenzer-PD Sinuskenn- linie	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1} \cdot 2 \frac{v}{\mu_1}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\sigma_\varphi^2/2}$	$\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{I_O(\alpha)} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu^2} I_\nu(\alpha)$
Begrenzer-PD Dreieckkenn- linie	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1} \cdot 2 \frac{v}{g_O}$	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1} \cdot 2 e^{\sigma_\varphi^2/2} \cdot \frac{v}{\mu_1}$	$\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{I_O(\alpha_L)} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu^2} I_\nu(\alpha_L)$
Begrenzer-PD Sägezahnkenn- linie	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1} \cdot 2 \frac{v}{g_O}$	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1} \cdot 2 \frac{v}{K_e}$	$\frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{I_O(\alpha_L)} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu^2} I_\nu(\alpha_L)$
allgemeine Beziehungen	$\frac{n_1^2}{B_1/B_1}, g_O', K_e = f[(SNR)_1]; (SNR)_1 = \alpha \cdot v; \alpha_L = \sigma_\varphi^2$ Linearis.			

Tab.5.1 Varianz des Phasenfehlers $\sigma_\phi^2 = f(v, 1/\alpha)$ in verschiedenen Stufen der Näherung, PLL 1.Ordnung

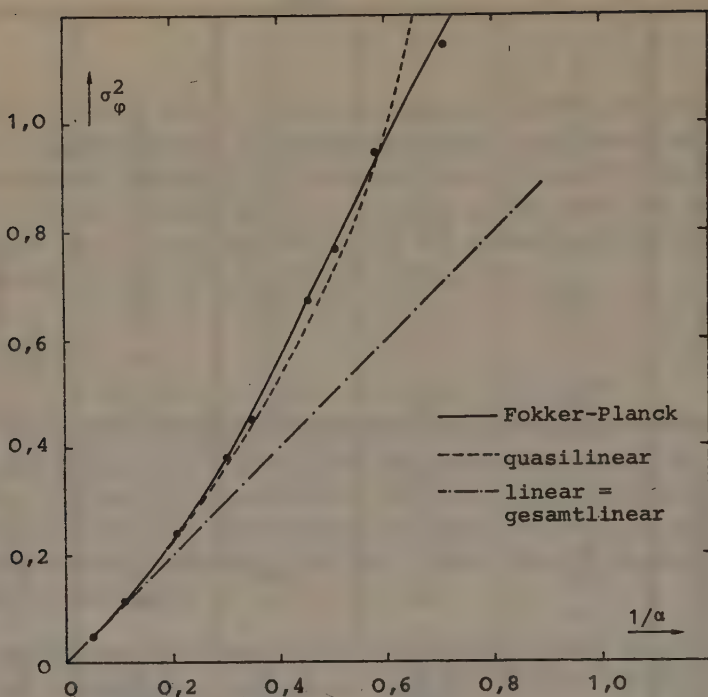


Bild 5.2 Varianz des Phasenfehlers, PLL 1. Ordnung mit Sinus-PD ohne Begrenzer, verschiedene Näherungsstufen und Meßpunkte

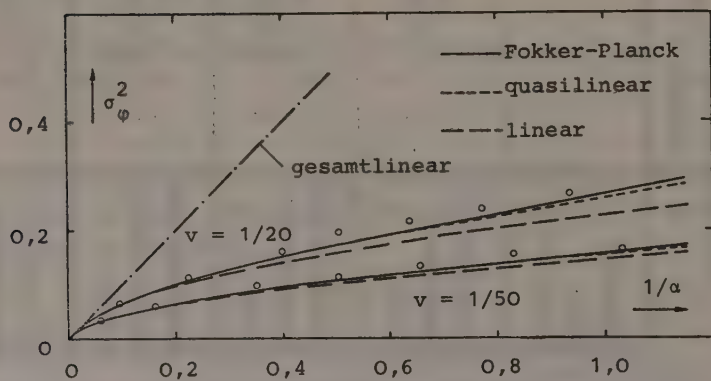


Bild 5.3 Varianz des Phasenfehlers, PLL 1. Ordnung, Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie, verschiedene Näherungsstufen und Meßpunkte

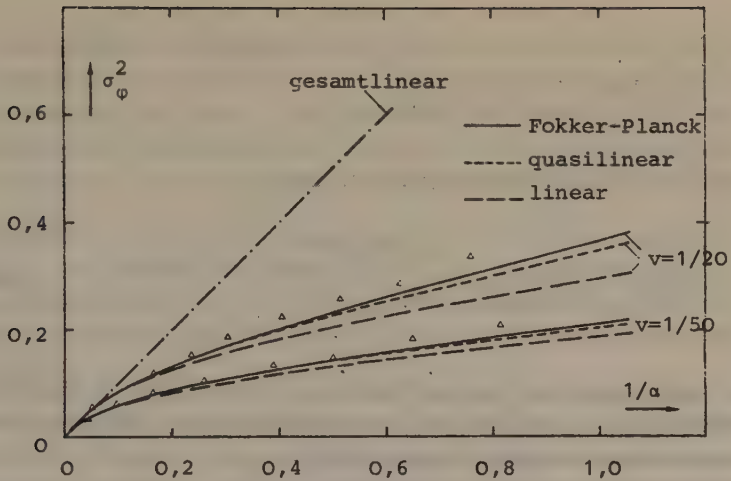


Bild 5.4 Varianz des Phasenfehlers, PLL 1. Ordnung, Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie, verschiedene Näherungsstufen und Meßpunkte

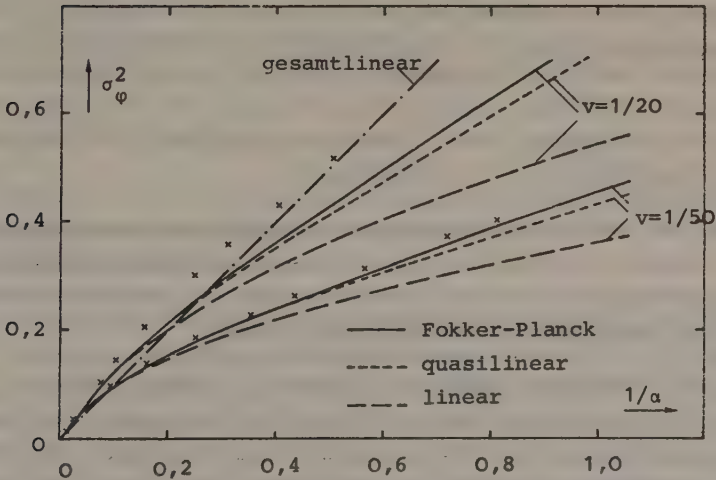


Bild 5.5 Varianz des Phasenfehlers, PLL 1. Ordnung, Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie, verschiedene Näherungsstufen und Meßpunkte

$$\frac{1}{\alpha_L} = \frac{1}{a\mu_1} = \sigma_\varphi^2 \Big|_{g'(\varphi)=g'_0\varphi} \quad (5.7)$$

Damit und mit Gl.(A1.3) gilt für $p(\varphi)$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(\alpha_L)} e^{\alpha_L \cos \varphi} \quad (5.8)$$

Zur Berechnung der Varianz nach Gl.(4.20) wird die Exponentialfunktion mit Hilfe der Anger-Jacobi-Formel Gl.(A4.3) in eine Reihe entwickelt. Es ergibt sich

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{I_0(\alpha_L)} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{1}{v^2} I_v(\alpha_L) \quad (5.9)$$

Diese Beziehungen gelten für sinusförmige Modellkennlinien. Sie können daher auch näherungsweise für den Dreieck-Diskriminator benutzt werden (s. Tab.5.1), wenn entsprechend für $1/\alpha_L$ die nach Gl.(4.9) bei linearisierter Modellkennlinie berechnete Varianz σ_φ^2 eingesetzt wird, da in der Reihenentwicklung für $g'(\varphi)$ beim Dreieck-Diskriminator die Terme höherer Ordnung für kleine $(\text{SNR})_1$ rasch abklingen und $g'(\varphi)$ dann nahezu sinusförmig wird (s. Abschn.3.2).

Dies gilt nicht im selben Maße für Sägezahn-Diskriminatoren (s. Abschn.3.2), so daß hier zur Bestimmung der Verteilungsdichte die Gl.(4.19) und zur Berechnung der Varianz die Gl.(4.20) numerisch integriert werden müssen.

Aus den grafischen Darstellungen von σ_φ^2 in den Bildern 5.2 bis 5.5 erkennt man, daß sich durch die Verwendung von Begrenzer-Diskriminatoren (vor allem mit Sinuskennlinie) die Varianz des Phasenfehlers erheblich verringern läßt. Dies liegt daran, daß die Parameter des allgemeinen PLL-Modells vom HF-Störab-

stand abhängen. Insbesondere wird bei einer Zunahme der Eingangs-Rauschleistung (entspricht einer Zunahme von $1/\alpha$ bzw. einer Abnahme von $(\text{SNR})_1$) die Steigung der Modellkennlinien der Begrenzer-Diskriminatoren kleiner, was eine Verringerung der effektiven Rauschbandbreite zur Folge hat.

Außerdem ist σ_φ^2 in den Bildern 5.3 bis 5.5 zusätzlich eine Funktion vom Bandbreitenverhältnis v , da sich der HF-Störabstand gemäß $(\text{SNR})_1 = \alpha \cdot v$ (s. Gl. 2.31) und damit die davon abhängigen Parameter des Modells bei festem $1/\alpha$ (Abszisse) mit v ändern.

Zusätzlich sind in den Bildern 5.2 bis 5.5 die mit der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Versuchsanordnung ermittelten Meßpunkte eingetragen. Für den einfachsten Fall des Sinus-Diskriminators ohne Begrenzer stimmen die Meßpunkte mit der - im Rahmen der getroffenen und bei der Messung erfüllten Voraussetzungen - exakten Berechnung nach der Fokker-Planck-Gleichung überein, so daß damit die Genauigkeit des Meßaufbaus überprüft ist. Auch für die anderen Kennlinien bestätigen die Messungen im wesentlichen die nichtlineare Rechnung. Insbesondere zeigt sich für kleine Werte von v ($v=1/50$), für welche die Voraussetzung $B_1 \gg f_R$ gut erfüllt ist, die beste Übereinstimmung.

5.2.2 Der PLL 2.Ordnung

Beim PLL mit aktivem PI-Regler ist die Varianz des Phasenfehlers i.a. zusätzlich abhängig vom Dämpfungsfaktor D bzw. der Kreisverstärkung K .

Bei der größten Näherung, der Gesamtlinearisierung, gilt auch hier innerhalb desselben Gültigkeitsbereiches $(\text{SNR})_1 > 10$ wie beim Kreis 1.Ordnung die lineare Beziehung Gl.(4.10)

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad (4.10)$$

wobei für die in $1/\alpha$ implizit enthaltene Rauschbandbreite f_R jetzt die entsprechende Formel (s.Tab.2.1) für den Kreis 2. Ordnung einzusetzen ist.

Bei Linearisierung der Modellkennlinie wird die Varianz σ_φ^2 gemäß Gl.(4.8) und (4.9) nach der Formel

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\overline{n'^2}}{B_1'/B_1} \frac{2v}{1+K} \left[\frac{1}{g_o'^2} + \frac{K}{g_o'} \right] \quad (5.10)$$

als Funktion von $1/\alpha$, v und K berechnet. Die Grenze für diese Näherung ergibt sich wie beim PLL 1.Ordnung nach Gl.(5.4) aus der Aussteuerung (also σ_φ^2) der Kennlinie $g'(\varphi)$ über ihren linearen Bereich hinaus (s. Bild 5.6 bis 5.9).

Entsprechend liefert die quasilineare Näherung mit den Gleichungen (4.5) und (4.6) die Varianz:

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\overline{n'^2}}{B_1'/B_1} \frac{2v}{1+K} \left[\frac{1}{K_e^2} + \frac{K}{K_e} \right] \quad (5.11)$$

Beim nichtlinearen Ansatz mit der Fokker-Planck-Gleichung ergibt sich für die Verteilungsdichte $p(\varphi)$ dieselbe Form (s.Gl. 4.33) wie beim entsprechenden Ansatz für den filterlosen Kreis. Demnach läßt sich für Sinus-Diskriminatoren und für kleine $(SNR)_1$ auch näherungsweise für den Dreieck-Diskriminator die Verteilungsdichte und die Varianz wie in Abschnitt 5.2.1 geschlossen berechnen mit dem Ergebnis für σ_φ^2 :

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{I_o(\alpha_{L,e})} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{1}{v^2} I_v(\alpha_{L,e}) \quad (5.12)$$

Entsprechend der unterschiedlichen Näherungslösungen in Abschnitt 4.1.3.1 und 4.1.3.2 sind dabei $1/\alpha_L$ bzw. $1/\alpha_e$ die Ergebnisse für σ_φ^2 nach der linearen ($1/\alpha_L$, Gl.5.10) bzw. nach der quasilinearen ($1/\alpha_e$, Gl.5.11) Näherung. Für den Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie ist dagegen zur Berechnung von σ_φ^2 die Integration nach Gl.(4.34) mit der Reihendarstellung von $G'(\varphi)$ numerisch zu lösen.

In den Diagrammen der Bilder 5.6 bis 5.9 sind die nach den verschiedenen Stufen der Näherung berechneten Ergebnisse für σ_φ^2 gegenübergestellt und zwar für feste, typische Werte des Bandbreitenverhältnisses v und der Kreisverstärkung K .

Den Einfluß der Kreisverstärkung K bzw. des Dämpfungsfaktors zeigen die Bilder 5.10 bis 5.13. Für alle Phasendiskriminatoren ergibt die genaueste verfügbare Berechnungsmethode - nämlich der Ansatz der Fokker-Planck-Gleichung mit quasilinearer Näherung des bedingten Erwartungswertes nach Abschnitt 4.1.3.2 - eine starke Abhängigkeit von der Kreisverstärkung K derart, daß der stärker entdämpfte Kreis (Dämpfungsfaktor $D \sim \sqrt{K}$) höheres Phasenrauschen am Ausgang erzeugt. Der Grenzfall $K \rightarrow \infty$ bedeutet den Übergang zum filterlosen PLL, so daß die entsprechenden Kurven in die aus den Bildern 5.2 bis 5.5 bekannten für den PLL 1.Ordnung übergehen.

Die an dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Meßaufbau ermittelten Meßwerte im Vergleich zur genauesten rechnerischen Lösung entsprechend Abschnitt 4.1.3.2 zeigen die Bilder 5.14 bis 5.17.

Es zeigt sich, daß die Berechnungen die Abhängigkeit von σ_φ^2 insbesondere von K und v im wesentlichen richtig beschreiben. Die Tendenz der Abweichungen entspricht der des filterlosen Kreises: Für große σ_φ^2 erreicht auch die genaueste vorhandene Näherungslösung nicht ganz die Meßwerte, für kleine $1/\alpha$ kann die Rechnung dagegen sehr gut durch das Experiment bestätigt werden.

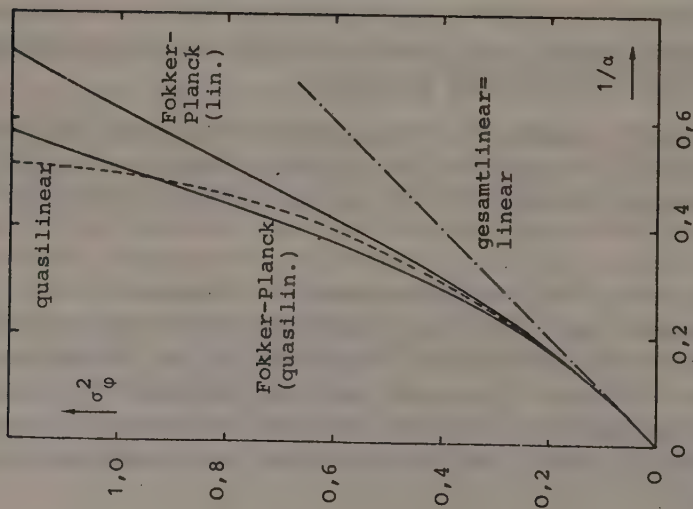


Bild 5.6 Varianz des Phasenfehlers, PLL 2. Ordnung, Sinus-PD ohne Begrenzer, verschiedene Näherungsverfahren, $K=2$

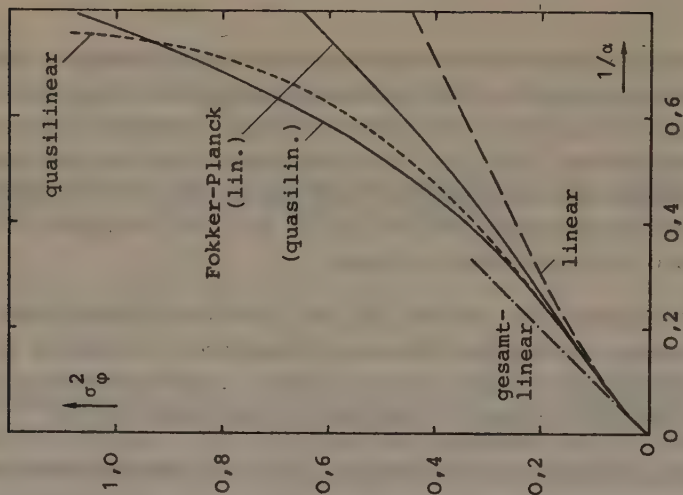


Bild 5.7 Varianz des Phasenfehlers, PLL 2. Ordnung, Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie, verschiedene Näherungsverfahren, $v=1/20$, $K=2$

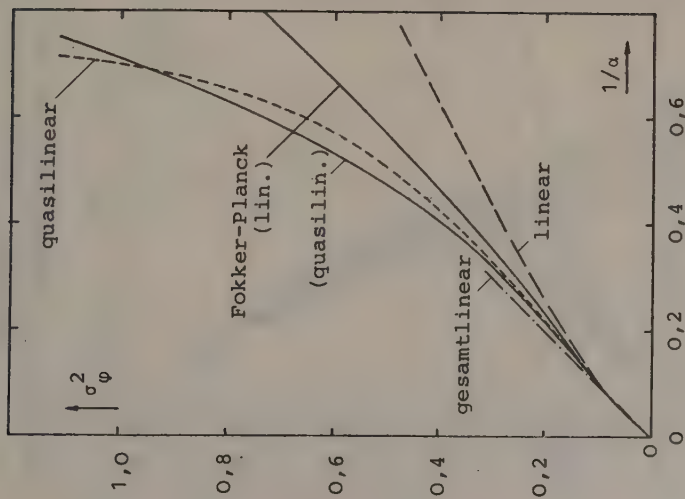


Bild 5.8 Varianz des Phasenfehlers, PLL 2. Ordnung, Begrenzer-PD mit Dreieckennlinie, verschiedene Näherungsverfahren
 $v=1/20$, $K=2$

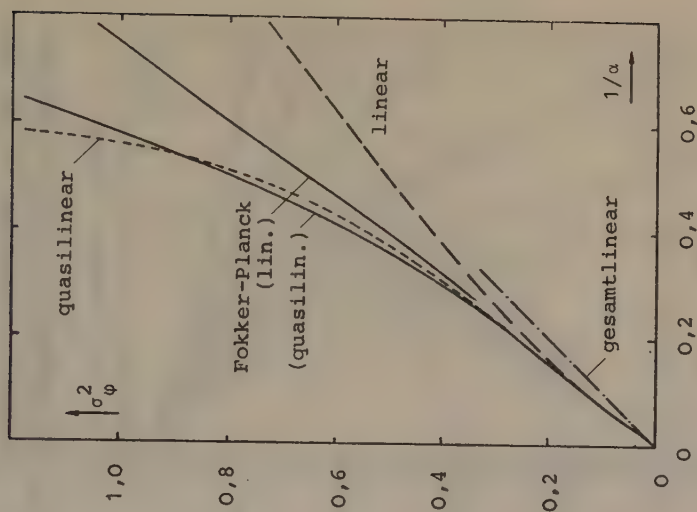


Bild 5.9 Varianz des Phasenfehlers, PLL 2. Ordnung, Begrenzer-PD mit Sägezahnkennlinie, verschiedene Näherungsverfahren
 $v=1/20$, $K=2$

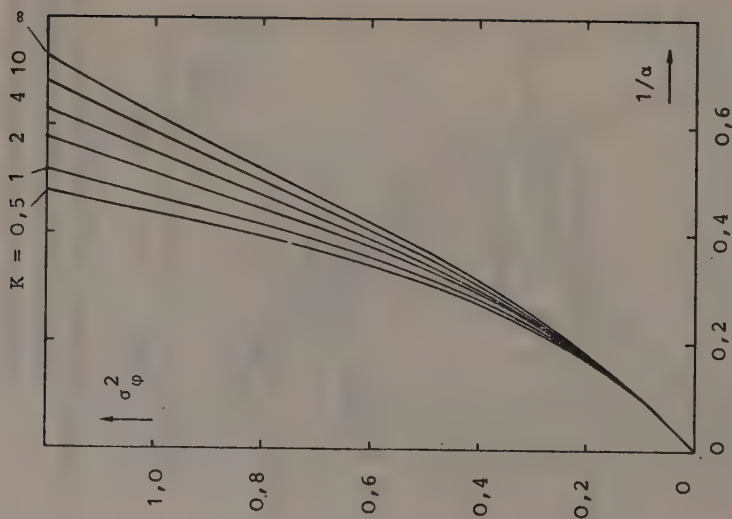


Bild 5.10 σ_ϕ^2 , Abhängigkeit von der Kreisverstärkung K (Sinus-PD ohne Begrenzer, PLL 2.Ordnung)

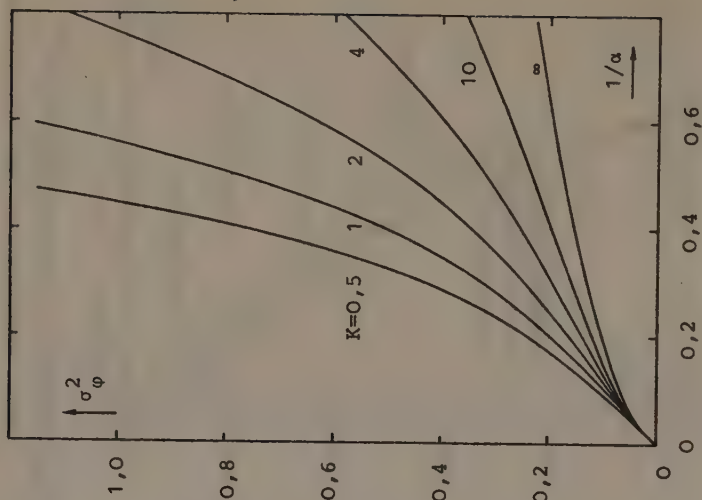


Bild 5.11 σ_ϕ^2 , Abhängigkeit von der Kreisverstärkung K (Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie, PLL 2.Ordnung, $v=1/20$)

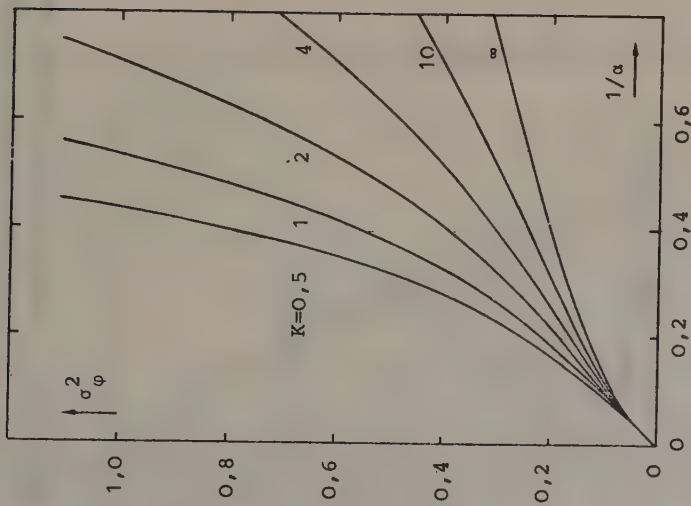


Bild 5.12 σ_φ^2 , Abhängigkeit von der Kreisverstärkung K (Begrenzer-PD mit Dreieckskennlinie, PLL 2.Ordnung, $v=1/20$)

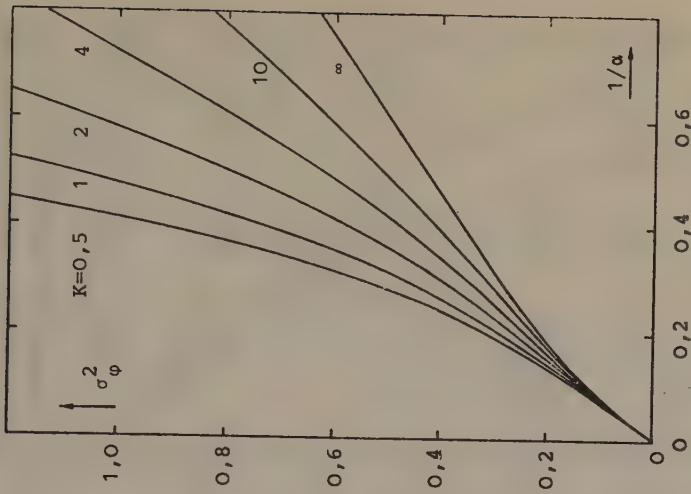


Bild 5.13 σ_φ^2 , Abhängigkeit von der Kreisverstärkung K (Begrenzer-PD mit Sägezahnkennlinie, PLL 2.Ordnung, $v=1/20$)

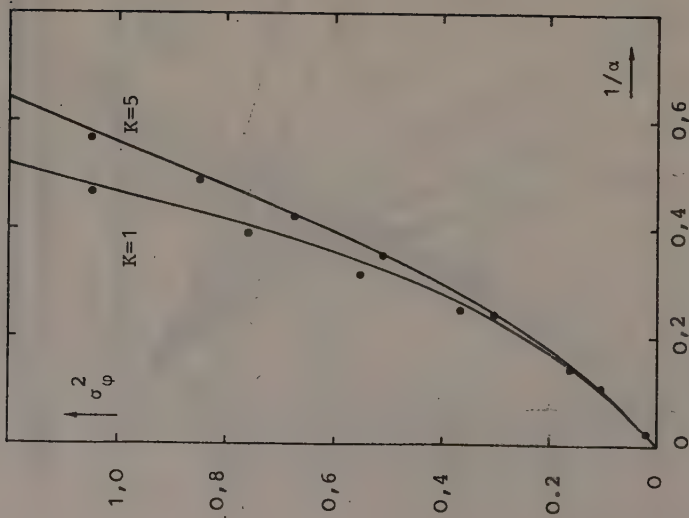


Bild 5.14 σ_φ^2 , Vergleich von Messung und Berechnung nach Abschn. 4.1.3.2 (Sinus-PD ohne Begrenzer, PLL 2. Ordnung)

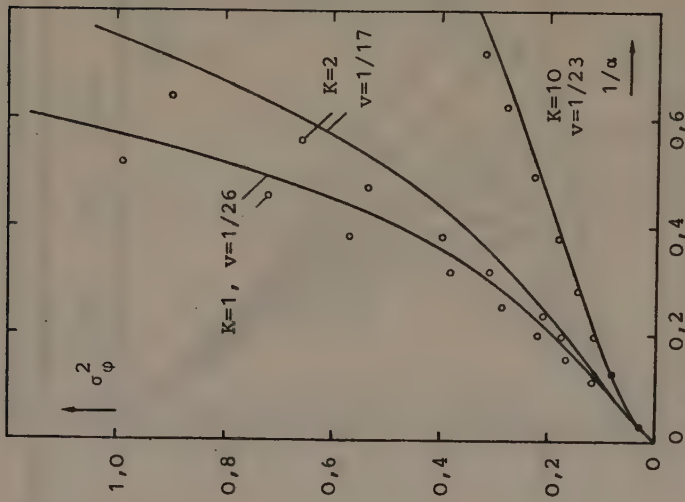


Bild 5.15 σ_φ^2 , Vergleich von Messung und Berechnung nach Abschn. 4.1.3.2 (Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie, PLL 2. Ordnung)

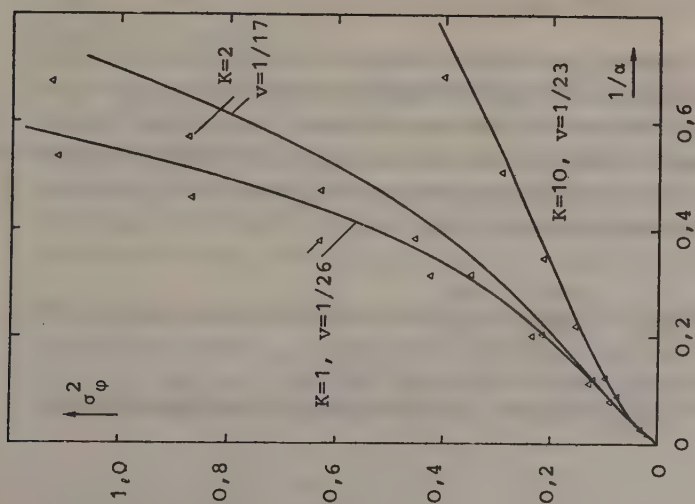


Bild 5.16 σ_ϕ^2 , Vergleich von Messung und Berechnung nach Abschn. 4.1.3.2 (Begrenzer-PD mit Dreieckkennlinie, PLL 2.Ordnung)

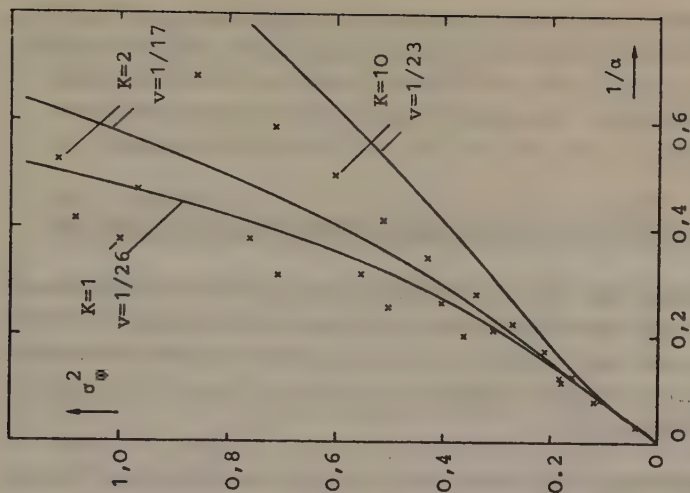


Bild 5.17 σ_ϕ^2 , Vergleich von Messung und Berechnung nach Abschn. 4.1.3.2 (Begrenzer-PD mit Sägezahnkennlinie, PLL 2.Ordnung)

Weitergehende, hier nicht dargestellte Messungen wurden zum einen im Bereich kleiner $1/\alpha$, zum anderen für weitere Werte von v vorgenommen. Wie beim Kreis 1. Ordnung spielt offenbar die Annahme $f_R < B_1$ hier eine wesentliche Rolle, denn die Übereinstimmung erweist sich für kleinere v als besser.

5.2.3 Vergleich der Störabstandsverbesserung durch den PLL

Die Berechnung von σ_φ^2 in den vorausgegangenen Abschnitten erlaubt Aussagen über den Störabstandsgewinn im regenerierten Signal des PLL und ermöglicht eine zusammenfassende Beurteilung der nichtlinearen Effekte der verschiedenen Diskriminator-Realisierungen.

Für die Regenerierung eines verrauschten unmodulierten Referenzsignals interessiert vor allem die mit Hilfe des PLL erzielbare Verbesserung des Signal-Rauschabstandes. Hierzu wird häufig das Ausgangs-Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_2$ angegeben, das direkt über die Varianz des Phasenfehlers definiert ist [z.B. 10]:

$$(\text{SNR})_2 = \frac{1}{2\sigma_\varphi^2} \quad (5.13)$$

Mit dieser Definition ergibt sich der aus der linearen Näherung für Phasendiskriminatoren ohne Begrenzer bekannte Zusammenhang, daß der PLL wie ein lineares Filter den Signal-Rauschabstand entsprechend dem Verhältnis der Rauschbandbreiten B_1 (HF-Bandbreite) und $2f_R$ (PLL-Tiefpassbandbreite) verbessert:

$$(\text{SNR})_{\text{PLL}} = \frac{(\text{SNR})_2}{(\text{SNR})_1} = \frac{B_1}{2f_R} \quad (\text{Gesamtlinearisierung}) \quad (5.14)$$

Bei Berücksichtigung der nichtlinearen Systemeigenschaften

verliert diese Beziehung ihre Gültigkeit. Dies wird durch nicht-lineare Effekte in folgender Weise verursacht:

- Die Begrenzernichtlinearität verbessert im wesentlichen den Störabstandsgewinn
- Die nichtlineare Diskriminatorkennlinie bewirkt eine Verschlechterung des (SNR) -Gewinns.

Die einzelnen nichtlinearen Effekte können wegen der stufenweisen Berücksichtigung bei der Berechnung von σ_{φ}^2 getrennt bewertet werden.

In Bild 5.18 ist jeweils der PLL-Gewinn $(\text{SNR})_{\text{PLL}}$ aufgetragen bezogen auf die bei Linearisierung sämtlicher Nichtlinearitäten gültigen Beziehung (5.14) und zwar für alle untersuchten PLL-Strukturen berechnet nach der nichtlinearen Theorie (Fokker-Planck-Gleichung) bei einem Bandbreitenverhältnis von $v=1/20$. Vergleichend lassen sich daraus die folgenden Feststellungen ableiten:

- Der Phasenregelkreis 2.Ordnung bringt stets einen geringeren Gewinn $(\text{SNR})_{\text{PLL}}$ als die Anordnung ohne Kreisfilter (bei gleichen Rauschbandbreiten), da er empfindlicher auf starke Aussteuerungen der nichtlinearen Kennlinie reagiert.
- Der Einsatz von Phasendiskriminatoren mit Begrenzern hat im wesentlichen eine Verbesserung des PLL-Gewinns zur Folge. Dies liegt daran, daß bei zunehmender Störleistung die Steigung der Modellkennlinie geringer wird und sich dadurch im gleichen Maße die effektive Rauschbandbreite des geschlossenen Regelkreises verkleinert (vergl. Gl.4.7 und 4.8).
- Die von der nichtlinearen Kennlinie verursachte Verschlechterung von $(\text{SNR})_{\text{PLL}}$ kommt beim Diskriminator ohne Begrenzer voll zur Geltung. Bei den Begrenzer-Diskriminatoren wird sie beim System 2.Ordnung zum Teil, beim System 1.Ordnung

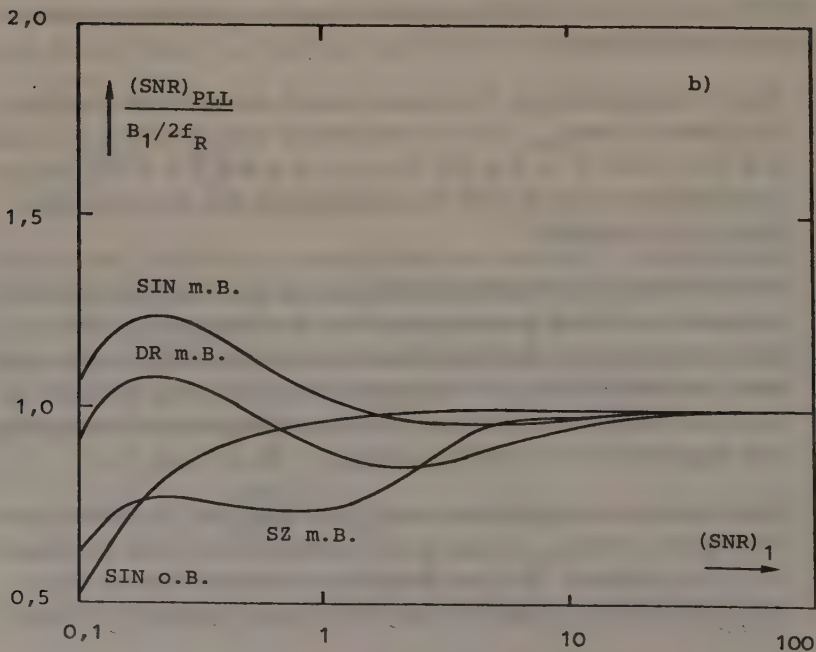
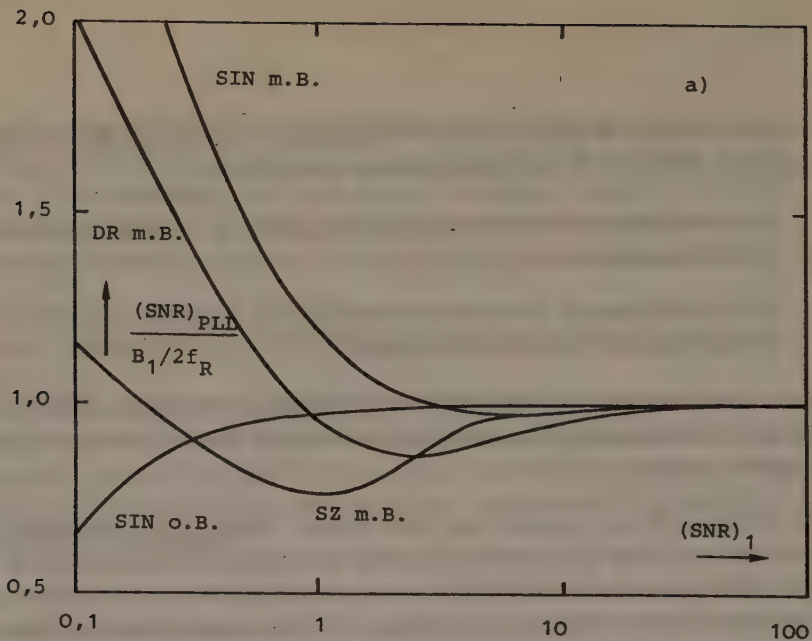


Bild 5.18 Vergleich des PLL-Gewinns $(\text{SNR})_{\text{PLL}} = (\text{SNR})_2 / (\text{SNR})_1$ für verschiedene PD-Kennlinien, $v=1/20$,
a) PLL 1. Ordnung, b) PLL 2. Ordnung, $K = 2$

fast vollständig verdeckt von der Verbesserung, die der Begrenzer bringt. Dies wurde nachgeprüft durch Berechnung entsprechender Kurven wie in Bild 5.18 nach Linearisierung der Modellkennlinie.

- Im Bereich großer $(\text{SNR})_1$ spielen nichtlineare Effekte keine Rolle (Gesamtlinearisierung) und der PLL-Gewinn wird für alle Diskriminatoren durch Gl.(5.14) beschrieben.
- Eine noch deutlichere relative Verbesserung läßt sich bei Begrenzer-Diskriminatoren erzielen, wenn das Bandbreitenverhältnis v verkleinert wird (s. Abschn. 5.2.1 und Bilder 5.3 bis 5.5). Für den Multiplizierer-Diskriminator ohne Begrenzung bedeutet eine Verkleinerung von v in Bild 5.18 dagegen wegen $(\text{SNR})_1 = \alpha \cdot v$ nur eine Verschiebung der entsprechenden Kurven in Abszissenrichtung [vergl. auch die hier von v unabhängige Darstellung von $\sigma_\varphi^2 = f(1/\alpha)$].

5.3 Berechnung und Messung der Häufigkeit von 2π -Phasensprüngen

Die in Abschnitt 4.2 abgeleitete und für beliebige Kennlinien gültige Beziehung Gl.(4.43) wird zunächst für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer überprüft. Für diesen Fall wurde $\overline{\tau}_{2\pi}$ in [3,8] in weniger allgemeiner Form berechnet.

Setzt man das Potential $G'(\varphi)$ der sinusförmigen Kennlinie (s. Tab.3.1) in Gl.(4.43) ein und berücksichtigt, daß hier

$$a = \alpha \quad (5.16)$$

gilt, so erhält man mit der Beziehung Gl.(A1.3) sofort:

$$\overline{\tau}_{2\pi\omega_s} = 2\alpha \underbrace{\int_0^{\pi} e^{\alpha \cos \varphi} d\varphi}_{\pi I_0(\alpha)} \underbrace{\int_0^{\pi} e^{-\alpha \cos \varphi} d\varphi}_{\pi I_0(\alpha)} \quad (5.17)$$

Das Ergebnis

$$\overline{\tau}_{2\pi} \omega_s = 2\alpha \pi^2 I_0^2(\alpha) \quad (5.18)$$

stimmt mit dem von [3,8] überein.

Die Lösung der Gl.(4.43) wird ebenfalls relativ übersichtlich für stückweise lineare - also dreieckförmige oder sägezahnförmige - Modellkennlinien $g'(\varphi)$, wie man sie als Grenzfall für sehr große $(\text{SNR})_1$ für Begrenzer-Diskriminatoren mit den entsprechenden Charakteristiken (s. Bild 3.2) oder bei Realisierung der Kennlinien ohne Begrenzer (s. Abschn.2.1) erhält. In beiden Fällen wird dann auch $a=\alpha$.

Im Falle einer sägezahnförmigen Modellkennlinie ist $g'(\varphi)=\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$, und aus Gl.(4.43) ergibt sich für $\overline{\tau}_{2\pi}$ die einfach auszuwertende Integralbeziehung:

$$\overline{\tau}_{2\pi} \omega_s = 2\alpha \int_0^{\pi} e^{-\frac{\alpha}{2}\varphi^2} d\varphi \int_0^{\pi} e^{\frac{\alpha}{2}\varphi^2} d\varphi \quad (5.19)$$

Für eine dreieckförmige Kennlinie $g'(\varphi)$ führt die abschnittsweise Integration gemäß Gl.(4.43) ($g'(\varphi)$ ist im Integrationsbereich stückweise linear) bei Ausnutzung der zusätzlichen Symmetrie der Dreieckkennlinie nach Zwischenrechnung auf das Ergebnis:

$$\overline{\tau}_{2\pi} \omega_s = 2\alpha \left[e^{\frac{\alpha}{8}\pi^2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\alpha}{8}\varphi^2} d\varphi + e^{-\frac{\alpha}{8}\pi^2} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{\alpha}{8}\varphi^2} d\varphi \right] \quad (5.20)$$

Im Rahmen der Behandlung von Begrenzer-Diskriminatoren sind die Gleichungen (5.19) und (5.20) also für die Untersuchung des Grenzverhaltens von $\overline{\tau}_{2\pi}$ für große $(\text{SNR})_1$ von Bedeutung.

	$\tau_{2\pi} \cdot \omega_s$	Grenzverhalten von $\tau_{2\pi} \cdot \omega_s$ $(SNR)_1 \gg 1$ $(SNR)_1 < 1$
Sinus-PD ohne Begrenzer	$2\alpha \pi^2 I_O^2 (\alpha)$	$\rightarrow \pi e$ $\rightarrow 2\alpha \pi^2$
Begrenzer-PD Sinuskenn- linie	$2a \pi^2 I_O^2 (\mu_1 \cdot a)$	$\rightarrow \pi e$ $\rightarrow 21,67 \frac{1}{V} I_O^2 (0,97 \sqrt{\frac{a}{V}})$
Begrenzer-PD Dreieckkenn- linie	$2a \int_0^{\pi} -a g'(\varphi) \pi a g'(\varphi) d\varphi$	$\rightarrow \pi e$ $\rightarrow 13,18 \frac{1}{V} I_O^2 (0,75 \sqrt{\frac{a}{V}})$
Begrenzer-PD Sägezahnkenn- linie	$2a \int_0^{\pi} -a g'(\varphi) \pi a g'(\varphi) d\varphi$	$\rightarrow \sqrt{2/(\alpha \pi)} [1 + 1/(\alpha \pi^2)] e^{\alpha \pi^2/2}$ $\rightarrow 4,05 \frac{1}{V} I_O^2 (0,36 \sqrt{\frac{a}{V}})$
allgemeine Beziehungen	$\frac{1}{a} = \frac{n_1^2}{B_1^2/B_1} \cdot 2V ; n_1^2, (B_1^2/B_1), \mu_1 = f[(SNR)_1] ; (SNR)_1 = \alpha \cdot V$	

Tab.5.2 Mittlere Zeit $\tau_{2\pi}$ zwischen 2π -Phasensprüngen,
PLL 1.Ordnung

Die Ergebnisse für die drei behandelten Begrenzer-Diskriminatoren bei beliebigen Störabständen sind in der Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Für die Sinuskennlinien mit cosinusförmigem Potential kann man (s. oben) $\overline{\tau}_{2\pi}$ mit Hilfe der modifizierten Besselfunktion I_0 darstellen, während für die Begrenzer-Diskriminatoren mit Dreieck- und Sägezahncharakteristik die Potentiale i.a. in Form von Reihen gegeben sind, so daß die bestimmten Integrale in Gl.(4.43) mit einem numerischen Integrationsverfahren berechnet werden müssen.

Zusätzlich ist in Tabelle 5.2 das Grenzverhalten von $\overline{\tau}_{2\pi}$ für sehr große und sehr kleine Signal-Rauschverhältnisse angegeben:

Für $(\text{SNR})_1 \gg 1$ nähern sich die Modellkennlinien $g'(\varphi)$ zunehmend ihrer Form im unverrauschten Fall, werden also entweder sinusförmig mit der Amplitude Eins, dreieck- oder sägezahnförmig. Außerdem strebt der Parameter a gegen α , so daß für diesen Grenzfall näherungsweise die Gleichungen (5.18) bis (5.20) wie für die entsprechenden Kennlinien ohne Begrenzer gelten. Dies stimmt mit der Erkenntnis überein, daß sich die Begrenzernichtlinearität für sehr große $(\text{SNR})_1$ nicht mehr auswirkt. Die in Tabelle 5.2 für diesen Fall angegebenen Grenzwerte für $\overline{\tau}_{2\pi}$ ergeben sich nach einer asymptotischen Entwicklung [16] der Besselfunktion in Gl.(5.18) bzw. der Exponentialfunktion in den Gleichungen (5.19) und (5.20).

Das Grenzverhalten für kleine $(\text{SNR})_1$, also kleine Werte des Parameters α , ist gekennzeichnet durch die Asymptoten, gegen die die Kenngrößen $\overline{n'^2}$, B'_1 und μ_1 des allgemeinen PLL-Ersatzmodells jeweils streben (s. Tab.3.1). Ferner werden dann alle Modellkennlinien $g'(\varphi)$ wegen $\mu_1 \gg \mu_v, v > 1$, praktisch sinusförmig und die Gl.(4.43) kann mit Hilfe der Besselfunktion I_0 ausgedrückt werden.

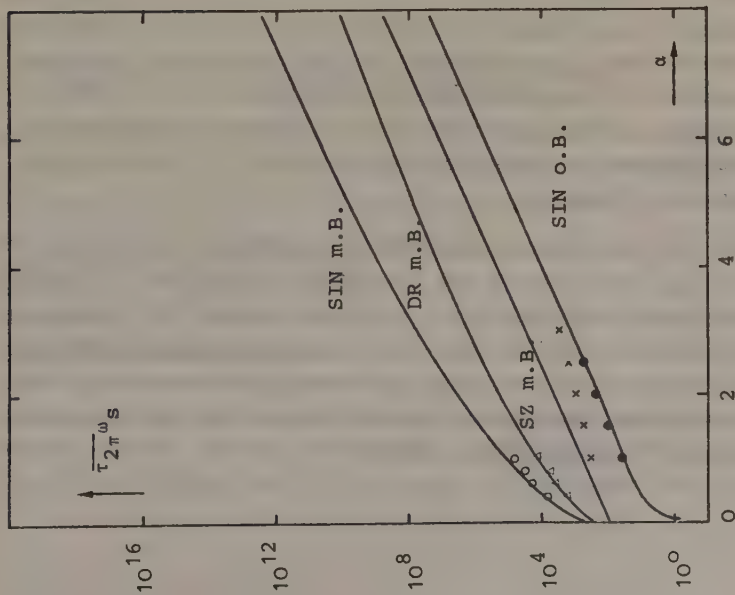


Bild 5.19 Mittlere Zeit $\bar{\tau}_{2\pi}^\omega$ zwischen 2π -Phasensprüngen, PLL 1.Ordnung, $v=1/20$.
Berechnete Kurven und Meßpunkte

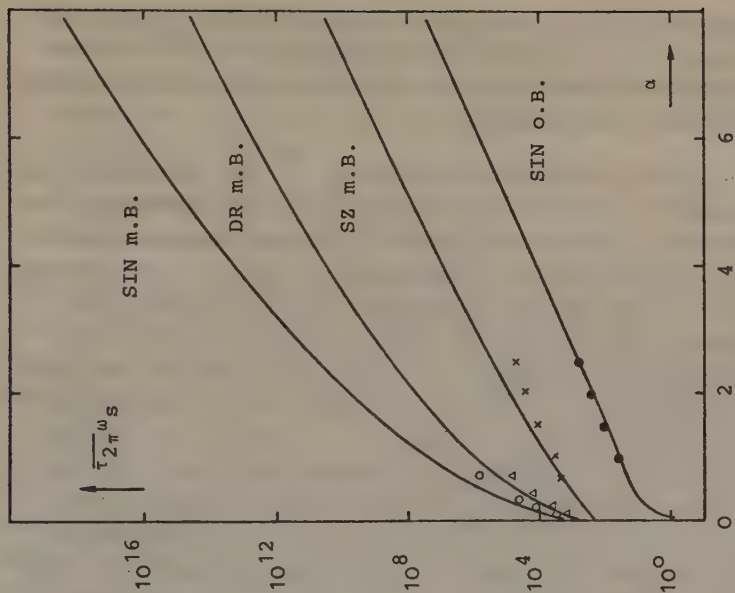


Bild 5.20 Mittlere Zeit $\bar{\tau}_{2\pi}^\omega$ zwischen 2π -Phasensprüngen, PLL 1.Ordnung, $v=1/50$.
Berechnete Kurven und Meßpunkte

Die Ergebnisse $\overline{\tau_{2\pi}}$ der numerischen Auswertung sind in den Bildern 5.19 und 5.20 zusammen mit Meßergebnissen [50] für zwei verschiedene Werte des Bandbreitenverhältnisses v als Funktion des Parameters α aufgetragen.

Wegen des erheblich höheren Störanteils $\overline{n'^2}$ der Begrenzer-Diskriminatoren (s. Bild 3.4) mit Dreieck- und vor allem mit Sägezahnkennlinie treten hier im Vergleich zum Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie Phasensprünge häufiger auf (geringe Häufigkeit von Phasensprüngen bedeutet große mittlere Zeit $\overline{\tau_{2\pi}}$ zwischen ihrem Auftreten). In diesem Bereich überwiegt die vergleichsweise größere Störleistung die größere Höhe der Potentialbarrieren (s. Bild 3.3) zwischen den stabilen Lagen (vergl. "Wellblechmodell", Abschn. 2.3). Wie bei der Varianz des Phasenfehlers (s. Abschn. 5.2) verhält sich auch hier der PLL mit Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer am ungünstigsten (mittlere Zeit $\overline{\tau_{2\pi}}$ ist dann am kleinsten). Die verschiedenen Diskriminator-Realisierungen des PLL 1.Ordnung verhalten sich also sowohl für $\overline{\tau_{2\pi}}$ als auch für σ_ϕ^2 hinsichtlich eines Vergleichs ihrer Störanfälligkeit entsprechend.

Im Unterschied zum Phasendiskriminator ohne Begrenzer sind weiterhin die von Null verschiedenen Werte für die Zeit zwischen Phasensprüngen bei den Begrenzer-Diskriminatoren für $(\text{SNR})_1 = \alpha \cdot v \rightarrow 0$ auffällig. Dies hängt mit der vom Begrenzer verursachten Einschränkung der maximalen Störleistung $\overline{n'^2}$ am Diskriminatorausgang zusammen.

Zusätzlich zu den theoretischen Ergebnissen sind in den Bildern 5.19 und 5.20 jeweils die an dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Meßaufbau experimentell ermittelten Werte [50] eingetragen. Man erkennt, daß die neuen berechneten Ergebnisse für die Begrenzer-Phasendiskriminatoren im wesentlichen bestätigt werden. Insbesondere werden die von der Theorie her zu erwartenden Tendenzen wiedergegeben, nämlich:

- Die starke Abhängigkeit vom Bandbreitenverhältnis v
- Der Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie zeigt das günstigste Rauschverhalten, gefolgt von Dreieck- und Sägezahncharakteristik.
- $\overline{\tau}_{2\pi}$ nähert sich bei großen Rauschleistungen einem konstanten Wert ungleich Null.

Für große mittlere Zeiten ($\overline{\tau}_{2\pi} \cdot \omega_s \geq 10^4$) zwischen den Phasensprüngen liefert die Messung eher zu kleine Werte, da über die dann notwendigen langen Mittelungszeiten die Drift der Meßgeräte problematisch wird. Die dadurch entstehende leichte Verstimmung im PLL führt im Mittel zu mehr Phasensprüngen je Zeiteinheit. Ferner ist die wesentliche Voraussetzung bei der Berechnung - kleine PLL-Rauschbandbreite f_R im Vergleich zur HF-Rauschbandbreite B_1 - um so besser erfüllt, je kleiner v wird. Aus diesem Grund zeigen die Meßwerte für $v=1/50$, vor allem für den Sägezahn-Diskriminator in Bild 5.20, bessere Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen, die damit als brauchbare Näherungslösungen angesehen werden dürfen.

5.4 Berechnung und Messung des Fangverhaltens

Das in Abschnitt 4.3 entwickelte Näherungsverfahren zur Berechnung des Halte- und Fangbereichs wird im folgenden für die verschiedenen Phasendiskriminatoren angewendet. Die theoretischen Ergebnisse werden stichprobenartig mit meßtechnisch ermittelten Werten verglichen.

5.4.1 Der Haltebereich

Zur Berechnung der Haltebereichsgrenze wird die Gl.(4.51) benutzt, aus der sofort hervorgeht, daß der Haltebereich $\Delta\Omega_H$ durch die Störung verkleinert wird. In der Tabelle 5.3 ist

$\Delta\Omega_H$, jeweils normiert auf den Wert des unverrauschten Falles (s.Gl.4.44), für die verschiedenen Diskriminatoren explizit angegeben. Entsprechend Gl.(4.51) ist das Maximum der Modellkennlinie für den Sägezahn-Diskriminator numerisch zu bestimmen; für die anderen Kennlinien tritt der größte Wert von $g'(\varphi)$ jeweils bei $\varphi=\pi/2$ auf.

Die berechneten Ergebnisse sind zusammen mit den experimentell ermittelten Meßwerten in den Bildern 5.21 bis 5.24 (Abschn. 5.4.2) jeweils über der normierten Rauschleistung $1/\alpha$ dargestellt. Bei den Begrenzer-Diskriminatoren ergibt sich dabei zusätzlich eine Abhängigkeit vom Bandbreitenverhältnis v und der Kreisverstärkung K sowie eine schwache Abhängigkeit vom Teilerfaktor m .

Der Haltebereich nimmt für $1/\alpha > -30\text{dB}$ deutlich mit zunehmendem Eingangsrauschen ab. Die Abnahme wird in der Reihenfolge: Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer, Begrenzer-Diskriminator mit Sinus-, Dreieck-, Sägezahnkennlinie nur unbedeutend stärker. Wenn der Störterm $\hat{n}'$ in Gl.(4.51) in die Größenordnung des Maximums der Kennlinie $g'(\varphi)$ kommt (bei $1/\alpha = -3\text{dB} \dots 0\text{dB}$), ergibt sich der Haltebereich zu Null. Dies bedeutet, daß dann bereits ohne eine Verstimmung $\Delta\Omega$ Phasensprünge über die Kennlinienmaxima - bzw. über die Potentialbarrieren des "Wellblechmodells" - hinweg auftreten.

Mit der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Anordnung wurde der Haltebereich jeweils stichprobenartig gemessen, um Anhaltspunkte für die Gültigkeit des Näherungsverfahrens zu gewinnen. Wie die Bilder 5.21 bis 5.24 verdeutlichen, liefert die Rechnung brauchbare Ergebnisse, die sich damit als relativ einfach anwendbare und ausreichend genaue Näherung erweist.

	normierter Haltebereich	normierter Fangbereich
Sinus-PD ohne Begrenzer	$\frac{\Delta\Omega_H}{\omega_S} = 1 - \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$	$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_S} = \sqrt{2m-m^2} + \sqrt{\frac{2}{\alpha} \left[\frac{m}{1+K} + m^2 \right]}$
Begrenzer-PD Sinuskennlinie	$\frac{\Delta\Omega_H}{\omega_S} = \mu_1 \sqrt{\frac{2}{a} \frac{\mu_1 (1+\mu_1 K) (1+K/m)}{(1+K) (1+\mu_1 K/m)}}$	$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_S} = \mu_1 \sqrt{2m-m^2} + \sqrt{\frac{2}{a} \left[\frac{m}{1+K} + m^2 \frac{f_{RL}}{f_R} \right]}$
Begrenzer-PD Dreieckkenn- linie	$\frac{\Delta\Omega_H}{\pi \omega_S} = \frac{2}{\pi} \left[g' \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{\frac{2}{a} \frac{f_{RL}}{f_R}} \right]$	$\frac{\Delta\Omega_F}{\pi \omega_S} = \sqrt{(4m-m^2)}/3 + \sqrt{\frac{2}{\alpha} \left[\frac{m}{1+K} + m^2 \right]}, (SNR)_1 \gg 1$ sonst numerisch
Begrenzer-PD Sägezahn- kennlinie	$\frac{\Delta\Omega_H}{\pi \omega_S} = \frac{1}{\pi} \left[\max \{ g'(\varphi) \} - \sqrt{\frac{2}{a} \frac{f_{RL}}{f_R}} \right]$	$\frac{\Delta\Omega_F}{\pi \omega_S} = \sqrt{(4m-m^2)}/3 + \sqrt{\frac{2}{\alpha} \left[\frac{m}{1+K} + m^2 \right]}, (SNR)_1 \gg 1$ sonst numerisch
allgemeine Beziehungen	$\frac{1}{a} = \frac{n^2}{B_1/B_1} \cdot 2\nu; n^2, (B_1/B_1), \mu_1, g'_O = f[(SNR)_1]; \frac{f_{RL}}{f_R} = \frac{g'_O (1+g'_O K) (1+K/m)}{(1+K) (1+g'_O K/m)}$	

Tab.5.3 Haltebereich $\Delta\Omega_H$ und Fangbereich $\Delta\Omega_F$ des PLL mit passivem PI-Regler bei verrauschtem Eingangssignal

5.4.2 Der Fangbereich

Zur Berechnung des Fangbereichs bei verdrauschem Referenzsignal wird die Gl.(4.67) unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.62) und (4.59) verwendet.

Bei Dreieck- und Sägezahn-Diskriminatoren mit Begrenzern ist die Modellkennlinie $g'(\varphi)$ in Form von Reihenentwicklungen gegeben; der Fangbereich wird daher in diesen Fällen numerisch nach folgender Strategie berechnet: Es wird ein Wert y derart vorgegeben, daß sich bei der numerischen Integration entsprechend Gl.(4.62) für den Teilerfaktor ein Wert $0 < m < 1$ ergibt. Mit demselben y wird x aus Gl.(4.59a) berechnet. Damit ist ein Wertetripel x, y und m gegeben, mit dem sich aus Gl.(4.67) der Fangbereich ermitteln läßt.

Für sinusförmige Modellkennlinien und für Begrenzer-Diskriminatoren mit Dreieck- und Sägezahncharakteristik für den Grenzfall $(SNR)_1 \gg 1$ ergeben sich dagegen Vereinfachungen:

Für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer wird $g'(\varphi) = \sin \varphi$, und die Integrale zur Berechnung des Fangbereichs sind geschlossen lösbar. Man erhält aus Gl.(4.62)

$$y = \frac{1}{\sqrt{2m-m^2}} \quad (5.21)$$

und aus Gl.(4.59a)

$$x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{2m-m^2} = \frac{1-2m+m^2}{2m-m^2} \quad (5.22)$$

Aus Gl.(4.67a) ergibt sich damit der Fangbereich direkt als Funktion von m . Berücksichtigt man noch in dem von der Störung herrührenden Summanden die Beziehungen von Abschnitt 3 und 4 für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer, so erhält

man hier:

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_S} = \sqrt{2m-m^2} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\frac{m}{1+K} + m^2} \quad (5.23)$$

Eine ganz entsprechende Rechnung ergibt für den Fangbereich des PLL mit Sinus-Begrenzer-Diskriminator:

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\omega_S} = \mu_1 \sqrt{2m-m^2} + \sqrt{\frac{n^2}{B_1/B_1} \cdot 4 \sqrt{\frac{m}{1+K} + m^2} \frac{f_{RL}}{f_R}} \quad (5.24)$$

(f_{RL} siehe Gl.4.49).

Für $(SNR)_1 \gg 1$ gehen die obigen Beziehungen über in das für den rauschfreien Fall in [36] berechnete Ergebnis $\Delta\Omega_F/\omega_S = \sqrt{2m-m^2}$.

Beim Dreieck- und beim Sägezahn-Begrenzer-Diskriminator ist i.a. die oben erwähnte numerische Berechnung erforderlich. Man kann jedoch zeigen, daß sich hier für den Grenzfall $(SNR)_1 \gg 1$ ebenfalls die für den störungsfreien Fall in [35] abgeleiteten Formeln ergeben:

Für den Sägezahn-Diskriminator ist dann $g'(\varphi)$ in guter Näherung linear im Integrationsbereich und man erhält aus Gl.(4.62)

$$\ln \frac{y+\pi}{y-\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{1-m}{y^2-\pi^2}} \quad (5.25)$$

Die Integration in Gl.(4.59a) liefert

$$x = 2\pi \left[\ln \frac{y+\pi}{y-\pi} \right]^{-1} \quad (5.26)$$

oder nach Umformung

$$y = \pi \coth \frac{\pi}{x} \quad (5.27)$$

Setzt man Gl.(5.25) in Gl.(5.26) ein und verwendet für y die Beziehung (5.27), so ergibt sich nach einer weiteren trigonometrischen Umformung

$$\frac{x}{\pi} \sinh \frac{\pi}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-m}} \quad (5.28)$$

Die Reihenentwicklung

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (5.29)$$

erlaubt schließlich - wenn man noch wegen der Voraussetzung $(\text{SNR})_1 \gg 1$ den letzten Summanden in Gl.(4.67a) vernachlässigt - die Darstellung des Fangbereichs als Funktion von m :

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\pi\omega_s} = \coth \frac{\pi}{x} - (1-m) \frac{x}{\pi} \quad (5.30a)$$

mit

$$\frac{x}{\pi} = \left[\frac{1-m+\sqrt{1-m}}{6m} \right] \frac{1}{2} \quad (5.30b)$$

Die Gl.(5.30) stimmt mit dem Ergebnis in [35] überein. Dort wird weiter gezeigt, daß sich diese Beziehung sehr gut durch folgenden einfachen Zusammenhang approximieren läßt:

$$\frac{\Delta\Omega_F}{\pi\omega_s} = \sqrt{(4m-m^2)/3} \quad (5.31)$$

Dies sind die Grenzwerte für große Störabstände (kleine Werte von $1/\alpha$) der in den Diagrammen von Bild 5.24 dargestellten Gesamtverläufe des Fangbereichs.

Nach demselben Verfahren (Gl. 5.25 bis 5.27) läßt sich auch der Grenzwert des Fangbereichs beim Dreieck-Begrenzer-Diskriminator berechnen, indem man nach Symmetriebetrachtungen die Integrationsgrenzen in den Bestimmungsgleichungen (4.62) und (4.59) auf das Gebiet $[-\pi/2, +\pi/2]$ beschränkt. Man erhält - in Übereinstimmung mit [35] - bei Normierung des Fangbereichs auf den unverrauschten Haltebereich $(\pi/2) \cdot \omega_s$ dasselbe Ergebnis wie Gl. (5.31):

$$\frac{\Delta\Omega_F}{(\pi/2)\omega_s} = \sqrt{(4m-m^2)/3} \quad (5.32)$$

Die Ergebnisse der Fangbereichsberechnung sind - soweit sie sich formelmäßig darstellen lassen - in der Tabelle 5.3 (s. Abschn. 5.4.1) mit angegeben.

In den Bildern 5.21 bis 5.24 ist neben dem Haltebereich (s. Abschn. 5.4.1) auch der berechnete Fangbereich als Funktion der normierten Rauschleistung $1/\alpha$ zusammen mit Meßwerten dargestellt. Entsprechend den Berechnungen ist $\Delta\Omega_F$ i.a. weiterhin abhängig von der Kreisverstärkung K und dem Bandbreitenverhältnis v ; außerdem bestimmt der Teilerfaktor m maßgebend den Fangbereich.

Für kleine $1/\alpha$ ergeben sich jeweils die Verhältnisse des ungestörten Falles. Bei zunehmender Rauschleistung $1/\alpha$ stellt man beim Phasendiskriminator ohne Begrenzer eine Vergrößerung des Fangbereichs fest, da die Störung wie eine Wobbelung des VCO wirkt und daher den Fangvorgang unterstützt. Dieser bei den Begrenzer-Diskriminatoren ebenfalls vorhandene Effekt (die Störung geht additiv in Gl. 4.67a ein) wird hier jedoch von der Abnahme der Amplitude der Kennlinien $g'(\varphi)$ fast vollständig verdeckt, so daß der Fangbereich für große $1/\alpha$ abnimmt.

Wie auch bei der Untersuchung des Haltebereichs, verdeutlichen wieder die Meßergebnisse die Brauchbarkeit der Näherungsrechnung.

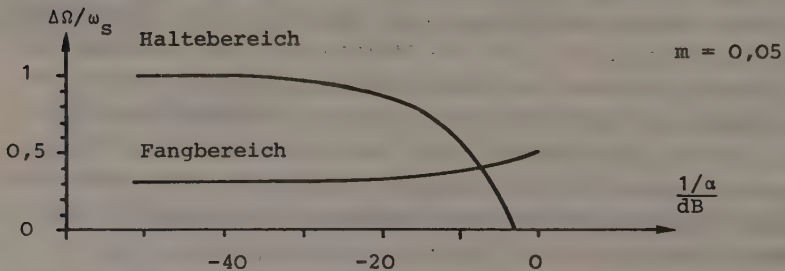
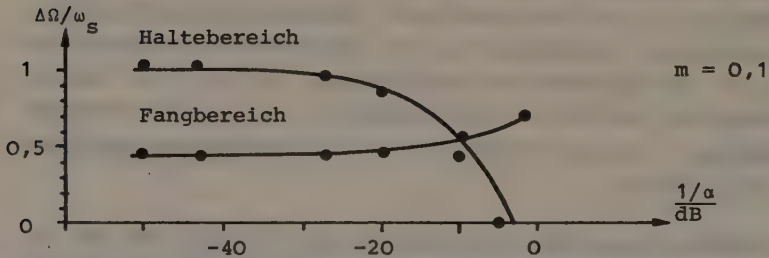
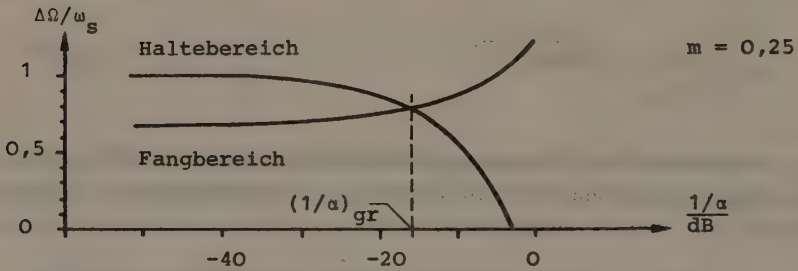
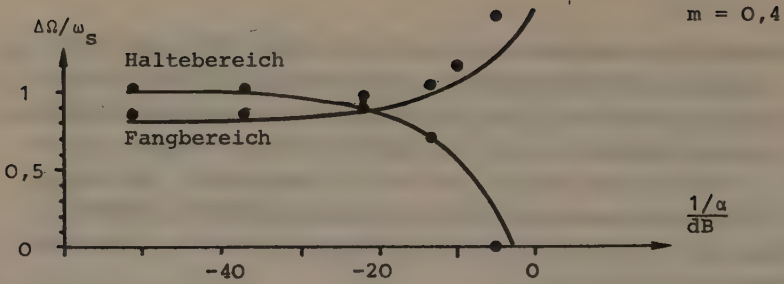


Bild 5.21 Halte- und Fangbereich (berechnete Kurven und Meßpunkte) bei verrauschtem Eingangssignal und verschiedenen Teilerfaktoren m (pass. PI-Regler, $K = 2$), Sinus-PD ohne Begrenzer

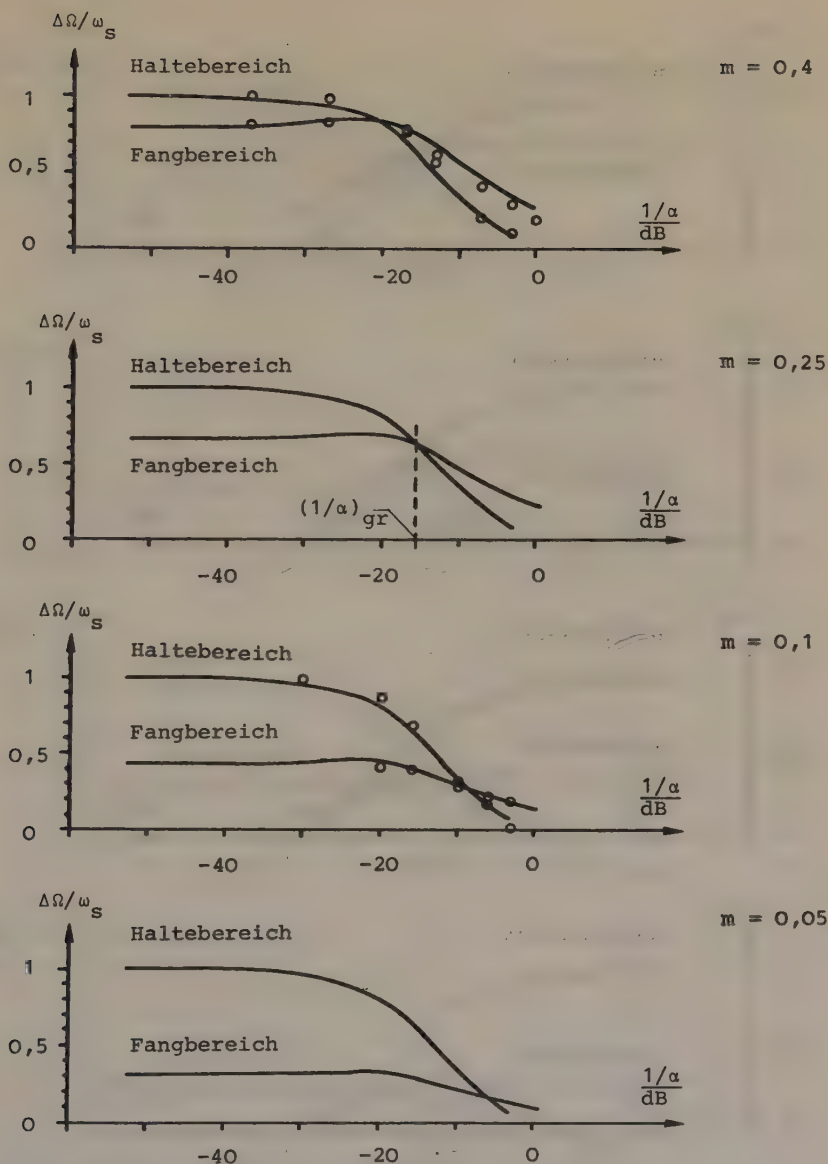


Bild 5.22

Halte- und Fangbereich (berechnete Kurven und Meßpunkte) bei verrauschtem Eingangssignal und verschiedenen Teilerfaktoren m (pass. PI-Regler, $K = 2$, $v = 1/20$), Begrenzer-PD mit Sinuskennlinie

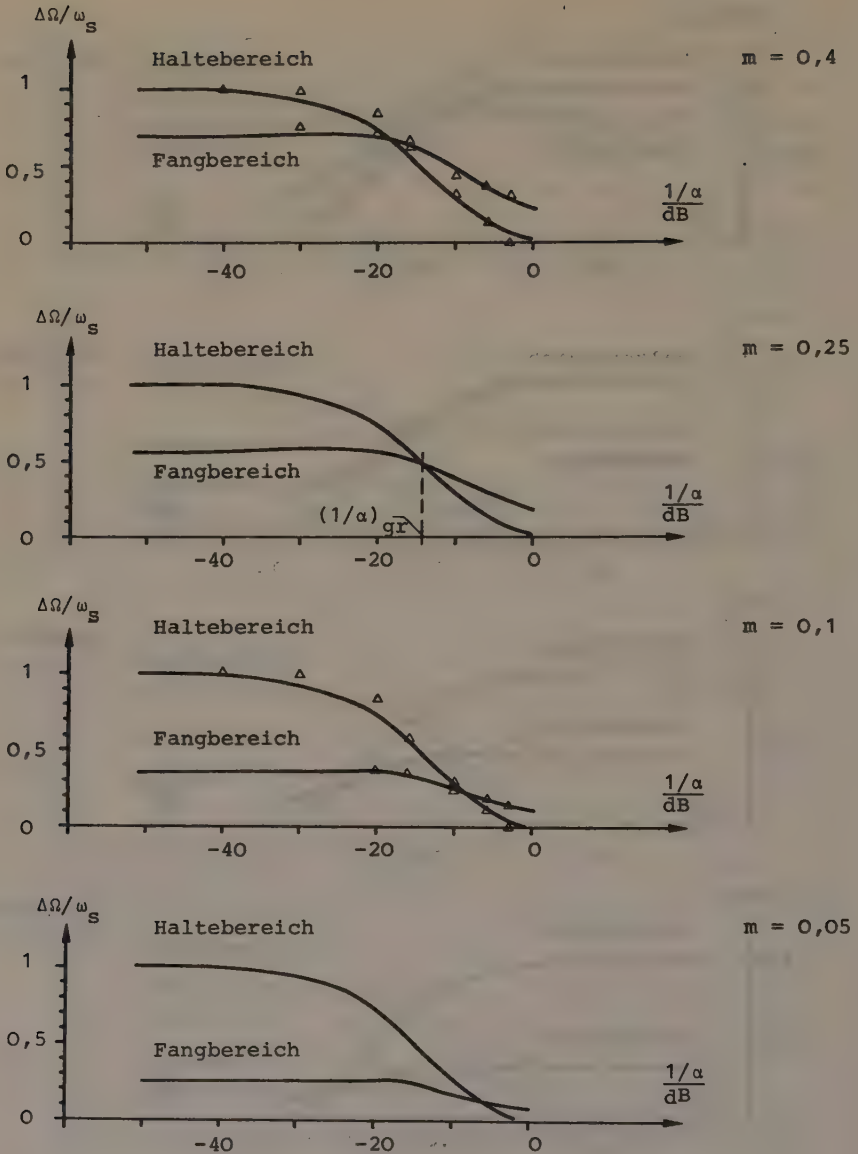


Bild 5.23 Halte- und Fangbereich (berechnete Kurven und Meßpunkte) bei verrauschtem Eingangssignal und verschiedenen Teilerfaktoren m (pass. PI-Regler, $K = 2$, $v = 1/20$), Begrenzer-PD mit Dreieckkennlinie

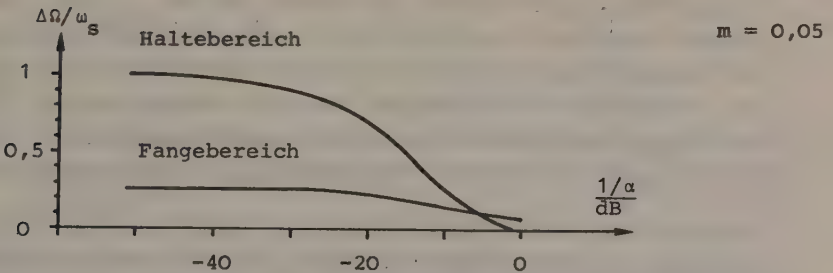
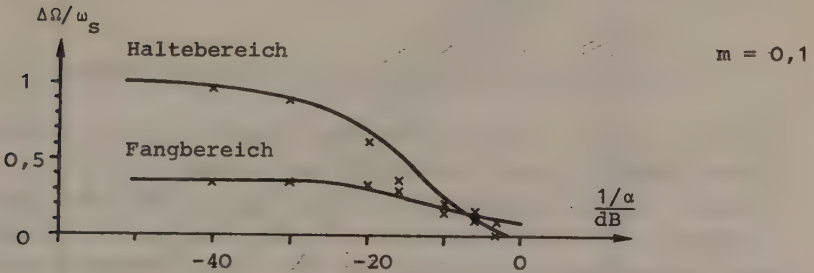
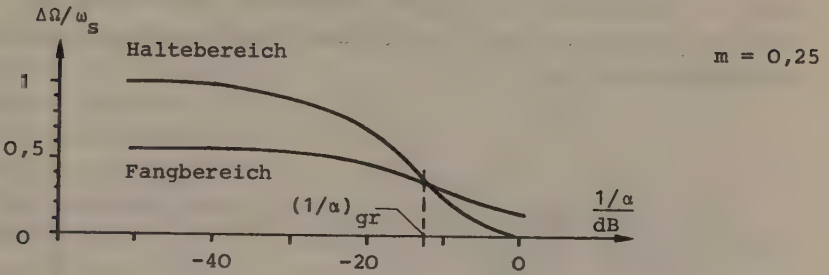
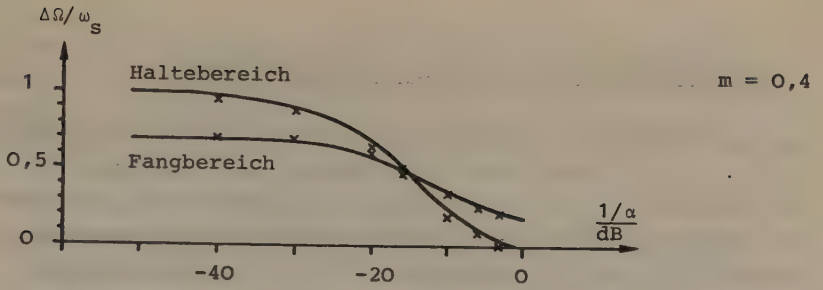


Bild 5.24 Halte- und Fangbereich (berechnete Kurven und Meßpunkte) bei verrauschtem Eingangssignal und verschiedenen Teilerfaktoren m (pass. PI-Regler, $K = 2$, $v = 1/20$), Begrenzer-PD mit Sägezahnkennlinie

5.4.3 Hysterese zwischen Halte- und Fangbereich

Aus der Berechnung des Halte- und Fangbereichs in den Bildern 5.21 bis 5.24 erkennt man, daß abhängig vom Teilerfaktor m ein Grenzwert $(1/\alpha)_{gr}$ der normierten Rauschleistung existiert, unterhalb dessen die typische Hysterese zwischen Halte- und Fangbereich [z.B. 7,8] beobachtet wird und oberhalb dessen weder von einem stabilen unsynchronisierten noch von einem stabilen synchronisierten Zustand des Phasenregelkreises gesprochen werden kann.

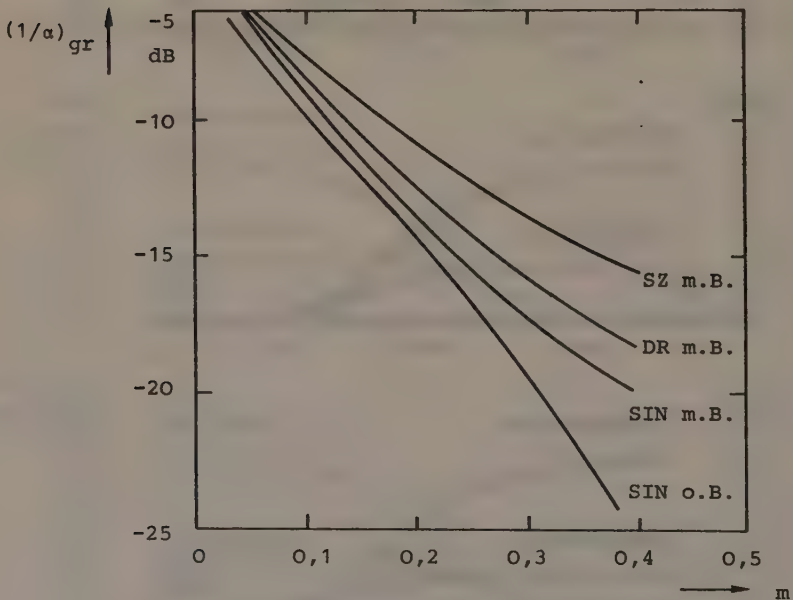


Bild 5.25 Normierte Rauschleistung $(1/\alpha)_{gr}$, bei der die Hysterese zwischen Halte- und Fangbereich verschwindet ($K=2$, $v=1/20$)

In Bild 5.25 ist dieser Grenzwert für die Hysterese in Abhängigkeit von m für $K=2$ und $v=1/20$ aufgetragen. Für sehr kleine m ($m \rightarrow 0$) strebt $(1/\alpha)_{gr}$ für alle Kennlinien gegen $(1/\alpha)_{gr} \rightarrow -3\text{dB}$.

5.5 Berechnung und Messung des Störverhaltens von PLL-FM-Demodulatoren

Das Berechnungs- und Optimierungsverfahren von Abschnitt 4.4 für den PLL-FM-Demodulator wird hier für die behandelten Phasendiskriminatoren angewendet. Die Ergebnisse sind eine optimale Dimensionierung des PLL für minimalen Demodulator-schwellwert, die explizite Berechnung dieser Schwelle in Abhängigkeit vom Modulationsindex sowie der Verlauf der Störabstandskurven oberhalb dieses Schwellwertes. Wiederum werden die theoretischen Berechnungen experimentell überprüft.

5.5.1 Optimaldimensionierung des PLL-FM-Demodulators

Es wird diejenige normierte PLL-Eigenfrequenz $d=d_{\text{opt}}$ gesucht, für welche der Demodulatorschwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ minimal wird. Hierzu wird zunächst für den Dämpfungsfaktor $D=1/\sqrt{2}$ (s. Abschn. 4.4.4) und für jeweils verschiedene Werte des Modulationsindex η aus Gl. (4.92) das Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_{1\text{SW}}$ bzw. $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ an der Schwelle in Abhängigkeit von $d=\omega_o/\omega_m$ berechnet. Im allgemeinen Fall geschieht dies durch numerische Nullstellensuche und für die entsprechenden Kenngrößen $\overline{n'^2}$, B'_1 und g'_0 der einzelnen Begrenzer-Diskriminatoren. Aus der Darstellung $(\text{SNR})_{\text{ESW}} = f(d)$ ergibt sich dann der minimale Schwellwert bei $d=d_{\text{opt}}$ gemäß Bild 5.26 (vergl. auch Bild 4.9).

Das Ergebnis in Bild 5.26 zeigt zunächst, daß das Optimierungsverfahren für alle Phasendiskriminatoren in etwa dieselbe optimale normierte Eigenfrequenz liefert. Die kleinen Unterschiede, die sich für große Werte von η ergeben, liegen

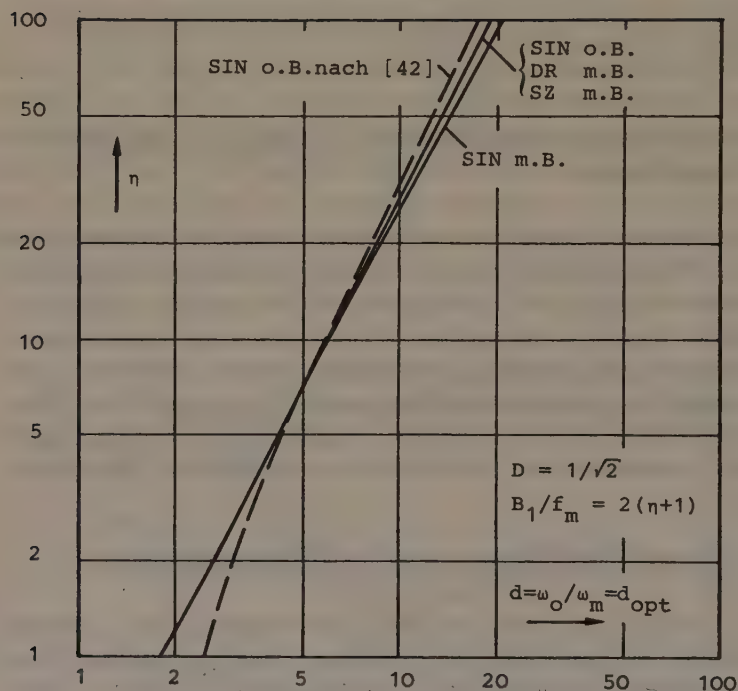


Bild 5.26 Optimale normierte PLL-Eigenfrequenz d_{opt}
 (minimale Demodulatorschwelle) in Abhängigkeit
 vom Modulationsindex η

innerhalb des Unsicherheitsbereichs des Näherungsverfahrens. In Bild 5.26 ist außerdem das einzige aus der Literatur bekannte Optimierungsergebnis dieser Art, das quasilineare Verfahren für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer in [42], mit angegeben. Man sieht, daß sich hier im wesentlichen das-

selbe Resultat ergibt. Man kann daher für alle Phasendiskriminatoren das für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer in Abschnitt 4.4.4 analytisch abgeleitete Ergebnis

$$d_{\text{opt}} = 1,88\sqrt{\eta} \quad (4.96)$$

verwenden und aus diesem einfachen Zusammenhang bei vorgegebenem Modulationsindex η die PLL-Bandbreite derart bestimmen, daß der Demodulatorschwellwert minimal wird.

Das Bild 5.26 zeigt auch anschaulich, daß mit zunehmendem Modulationsindex η (Hub der Eingangsphase ϕ_1 , s.Gl.4.70) die Eigenfrequenz f_0 (Bandbreite) relativ zur Modulationsfrequenz f_m erhöht werden muß, um den vom Signal ϕ_1 verursachten Phasenfehler im Linearitätsbereich der Kennlinien $g'(\varphi)$ zu halten. Dies erfordert eine relativ große PLL-Bandbreite, so daß zur Erzielung der vollen Störabstandsverbesserung nach Gl. (4.87) bei gleichzeitig optimaler Schwelle ein schmalbandiger Tiefpaß entsprechend der Basisbandbreite f_m zur Nachfilterung notwendig ist.

5.5.2 Die Demodulatorschwelle bei Optimaldimensionierung

Der Demodulatorschwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$, der bei der Wahl $d=d_{\text{opt}}$ sein Minimum annimmt, ist in Bild 5.27 abhängig vom Modulationsindex dargestellt. Zur Berechnung wurde für die Begrenzer-Diskriminatoren die allgemeine Beziehung Gl. (4.92) und für den Sinus-Diskriminator ohne Begrenzer die daraus abgeleitete geschlossene Formel Gl. (4.93) benutzt, die sich für $D=1/\sqrt{2}$ und $d=d_{\text{opt}}$ nach Gl. (4.96) näherungsweise reduziert auf

$$(\text{SNR})_{\text{ESW}} = 39,16 \sqrt{\eta} . \quad (4.93a)$$

Die Ergebnisse in Bild 5.27 zeigen, daß $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ nur wenig von der gewählten Diskriminator-Realisierung abhängt. Mit Gl.(4.93a) liegt somit eine allgemein anwendbare und sehr einfache Abschätzung für die Schwelle des optimal dimensionierten PLL-FM-Demodulators vor.

Zusätzlich ist in Bild 5.27 der Schwellwert für den konventionellen FM-Demodulator angegeben, wobei $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ nach Gl.(4.73) aus dem HF-Störabstand $(\text{SNR})_{1\text{SW}}$ an der Schwelle berechnet wird, der hier näherungsweise unabhängig von η ist und konstant bei ungefähr

$$(\text{SNR})_{1\text{SW}} \approx 10\text{dB} \rightarrow (\text{SNR})_{\text{ESW}} \approx 10 \cdot \frac{B_1}{f_m} \quad (5.33)$$

liegt [38,39]. Da beim konventionellen FM-Demodulator die Eingangsphase durch einen Begrenzer entsprechend der nicht-linearen Beziehung Gl.(2.9) gewonnen wird, wird der Schwell-

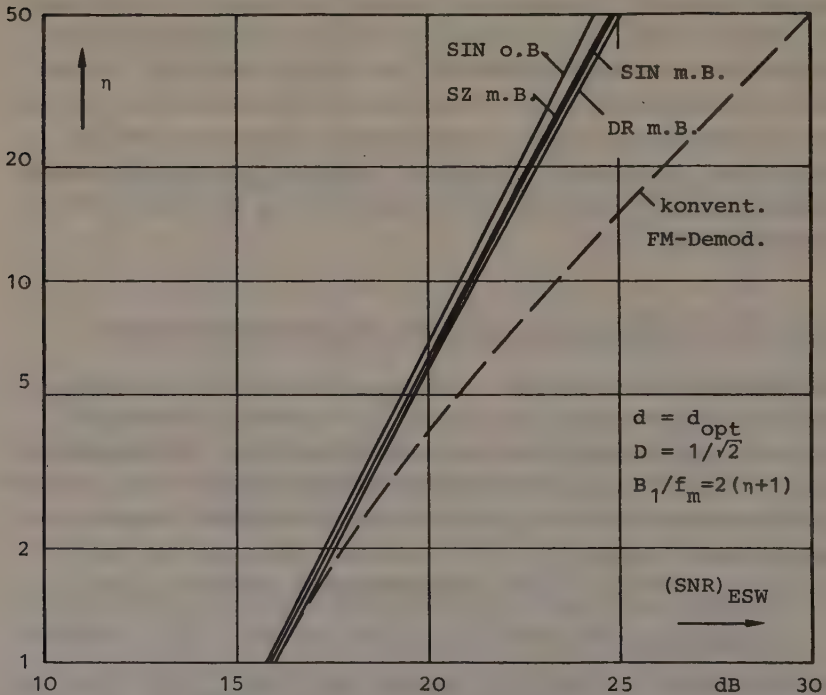


Bild 5.27 Demodulatorschwelle $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ bei optimaler Dimensionierung $d=d_{\text{opt}}$ in Abhängigkeit vom Modulationsindex η

wert dadurch verursacht, daß der HF-Störabstand am Begrenzer-eingang den auch für die Gesamtlinearisierung (s. Abschn.3.6.3) von Begrenzer-Phasendiskriminatoren maßgebenden konstanten Wert von etwa 10dB (s. auch Gl.5.3) unterschreitet und der Begrenzer dann nichtlinear zu arbeiten beginnt. Damit ist hier der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ wegen (Gl.4.73) direkt proportional zur HF-Bandbreite B_1 , und $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ wird minimal, wenn B_1 möglichst klein, d.h. entsprechend der Carson-Bandbreite wie in Bild 5.27, gewählt wird.

Im Gegensatz hierzu wird beim PLL-Demodulator ohne Begrenzer-Diskriminator der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ unabhängig von der HF-Bandbreite B_1 (s. Gl.4.93). Dies bedeutet, daß B_1 größer als entsprechend der Carson-Regel gewählt werden kann - um z.B. auftretende Trägerfrequenzverstimmungen (z.B. verursacht durch Doppler-Effekt) berücksichtigen zu können - o h n e daß sich der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ verschlechtert. Die Schwelle ist hier deswegen unabhängig von B_1 , weil sie von der nichtlinearen Wirkung des Phasendiskriminators (ohne Begrenzer) verursacht wird, für die im wesentlichen nur die Rauschleistung innerhalb der PLL-Bandbreite maßgebend ist.

Auch beim PLL-Demodulator mit Begrenzer-Diskriminator, der die beiden nichtlinearen Elemente: Begrenzer und Phasenvergleichler enthält, ist der Schwellwert $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$ und auch die Optimaldimensionierung d_{opt} weitgehend unabhängig von B_1 . Bei weitergehenden numerischen Untersuchungen der Gl.(4.92) ergab sich, daß die in den Bildern 5.26 und 5.27 für B_1/f_m entsprechend der Carson-Regel berechneten Ergebnisse sich auch für größere HF-Bandbreiten nur unwesentlich ändern.

5.5.3 Die Störabstandskurven des optimierten PLL-FM-Demodulators

Zur Überprüfung der näherungsweisen Berechnung und Optimierung wurden die Störabstandskurven an einem PLL-FM-Demodulator (s. Abschn.5.1) gemessen. Die Bilder 5.28 bis 5.30 zeigen die Er-

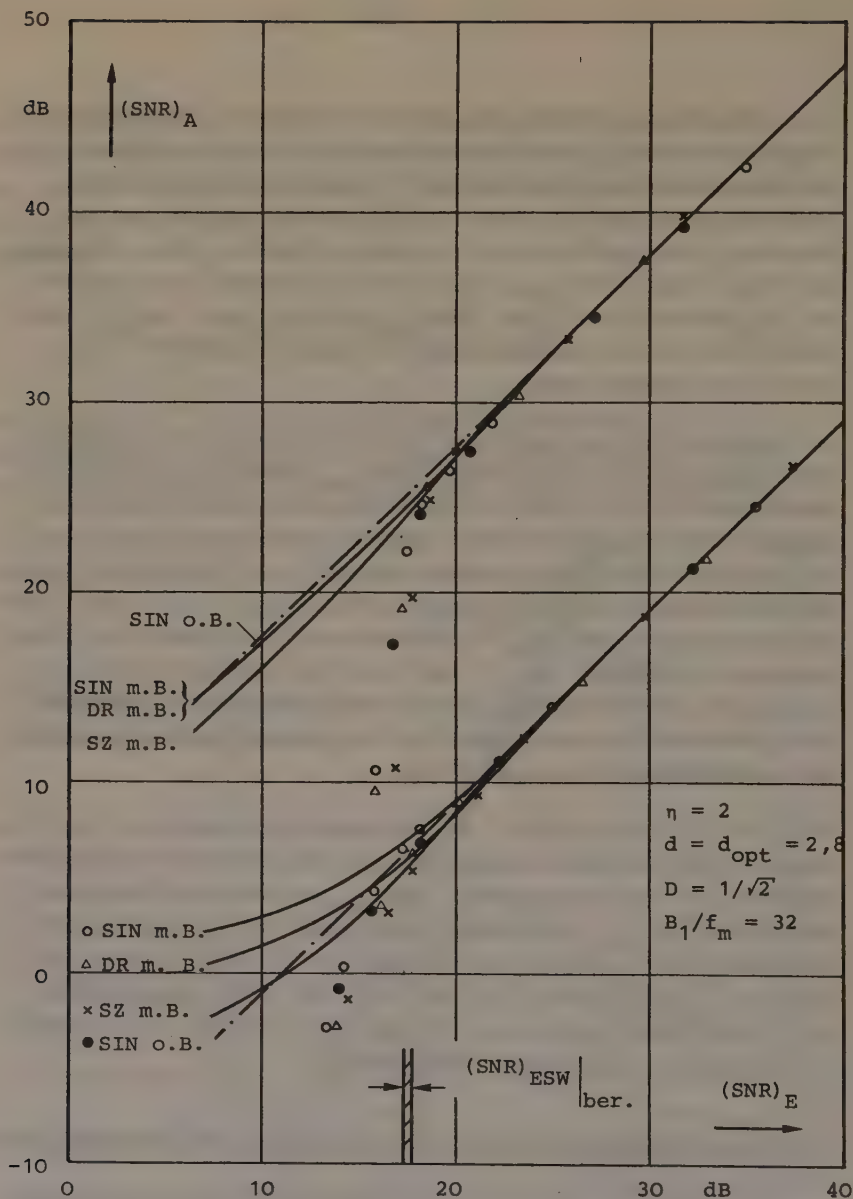


Bild 5.28 Ausgangs-Störabstand des optimierten PLL-FM-Demodulators mit verschiedenen PD-Kennlinien ($\eta=2$). Berechnete Kurven (linearisiertes Modell) und Meßpunkte. Oben mit, unten ohne Ausgangs-TP.

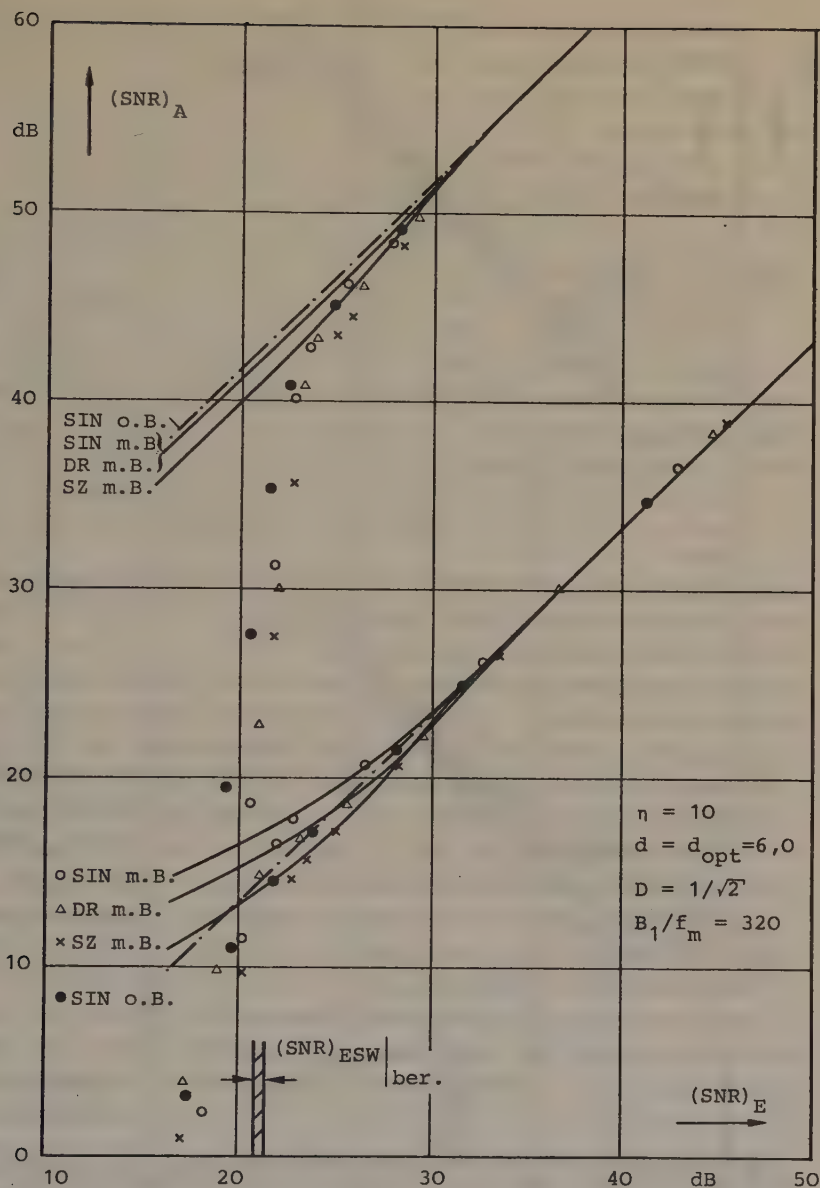


Bild 5.29 Ausgangs-Störabstand des optimierten PLL-FM-Demodulators mit verschiedenen PD-Kennlinien ($\eta=10$). Berechnete Kurven (linearisiertes Modell) und Meßpunkte. Oben mit, unten ohne Ausgangs-TP

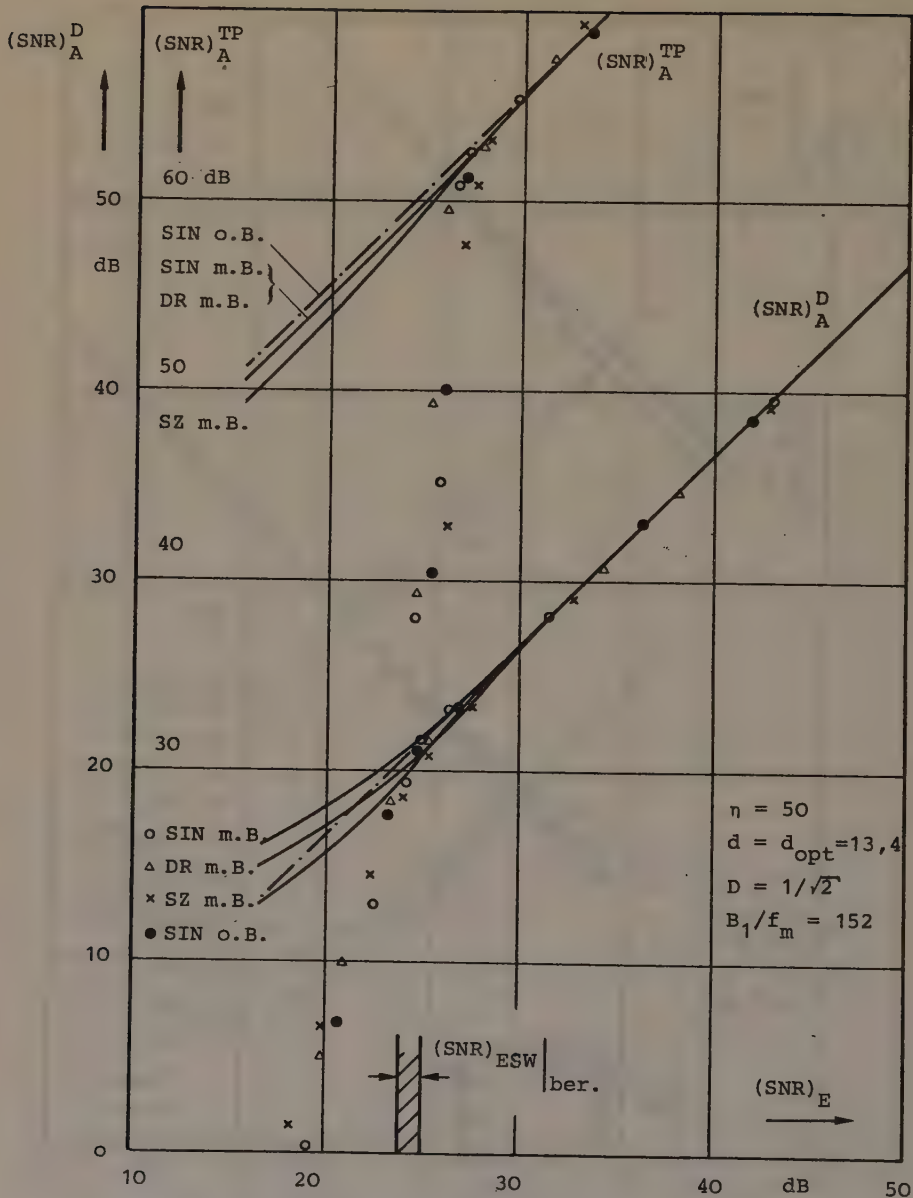


Bild 5.30 Ausgangs-Störabstand des optimierten PLL-FM-Demodulators mit verschiedenen PD-Kennlinien ($\eta=50$). Berechnete Kurven (linearisiertes Modell) und Meßpunkte. Oben mit, unten ohne Ausgangs-TP.

gebnisse für drei verschiedene Modulationsindizes und für alle untersuchten Phasendiskriminatoren. Die eingezeichneten Kurven sind die nach Gl.(4.83) bzw. Gl.(4.84) bei Linearisierung der Modellkennlinie $g'(\varphi)$ berechneten Störabstände und gelten daher *n i c h t* im nichtlinearen Bereich unterhalb der Schwelle.

Oberhalb des Schwellwertes bestätigen die Messungen die nach Gl.(4.83) bzw. (4.84) berechneten Störabstände. Im Bereich $(\text{SNR})_E \gg 1$ (und zwar ungefähr bei $(\text{SNR})_1 > 10\text{dB}$) zeigt sich stets ein linearer Zusammenhang $(\text{SNR})_A = f[(\text{SNR})_E]$, der die Gesamtlinearisierung kennzeichnet. Da die Grenzfrequenz f_g des Ausgangs-Tiefpaß (Butterworth-Filter 8.Grades) ungefähr gleich der Modulationsfrequenz f_m gewählt wurde, ergibt sich am Tiefpaß-Ausgang u_{TP} nach Messung und Rechnung nahezu die ideale Störabstandsverbesserung entsprechend $3\eta^2/2$ (s. Gl.4.87).

In Schwellennähe verlaufen die berechneten Störabstandskurven für die Begrenzer-Diskriminatoren nichtlinear. Hier zeigt sich der durch g'_0 , B'_1 und $\overline{n'^2}$ implizit berücksichtigte Einfluß der Begrenzernichtlinearität auf den geschlossenen Regelkreis. Dabei ergeben sich am Demodulatorausgang u_D auch größere Störabstände als entsprechend der Gesamtlinearisierung. Dies liegt vor allem daran, daß die Rauschbandbreite im linearisierten Modell entsprechend Gl.(4.8) bei wachsendem Signal-Rauschverhältnis abnimmt, so daß dadurch die Rauschleistung (s. Gl. 4.82) am Demodulatorausgang überproportional verkleinert wird. Am Ausgang u_{TP} des Nachfilters wirkt sich dieser Effekt kaum aus, da der Tiefpaß die Ausgangs-Rauschleistung auf das schmale Frequenzband der Breite $f_g \approx f_m$ beschränkt. Der bei linearisierter Kennlinie berechnete nichtlineare Verlauf von $(\text{SNR})_A^D$ (s. Gl.4.83) - insbesondere das Abheben des Störabstands nach oben - wird oberhalb der Demodulatorschwelle durch die Messungen bestätigt.

Der Demodulatorschwellwert ist nach der hier verwendeten Näherungsrechnung unabhängig vom Zusatztiefpaf. In der Praxis verbessert ein möglichst ideales Nachfilter den Störabstand ober-

halb der Schwelle um den Gewinnfaktor in Gl.(4.84); der Wert der Demodulatorschwelle, gekennzeichnet durch das Abknicken der Störabstandskurven, ändert sich jedoch praktisch nicht. Lediglich unterhalb der Schwelle nimmt der Störabstand mit Ausgangstiefpaß wesentlich stärker ab als ohne Nachfilter (s. Meßergebnisse). Der entsprechend der Berechnung (s. Bild 5.27) erwartete Bereich der Schwellwerte für die verschiedenen Diskriminator-Kennlinien ist in den Diagrammen der Störabstandskurven an der Abszisse markiert. Die Berechnung der Schwelle ist aus der Gültigkeitsgrenze des vereinfachten PLL-Ersatzschaltbildes mit linearisierter Modellkennlinie abgeleitet. Betrachtet man die entsprechend berechneten mit den gemessenen Störabständen, so ergibt sich die Schwelle als Eingangs-Signal-Rauschverhältnis $(\text{SNR})_{\text{ESW}}$, bei dem die Meßwerte gegenüber der Rechnung nach unten abweichen. Dieser so gemessene Wert kennzeichnet damit die untere Grenze des zweckmäßigen Betriebsbereichs des PLL-FM-Demodulators und stimmt relativ gut mit dem berechneten Ergebnis überein.

Das in Abschnitt 4.4 entwickelte Näherungsverfahren zur Berechnung und Optimierung der Demodulatorschwelle erweist sich - in Verbindung mit dem allgemeinen Rauschersatzschaltbild - damit als gut anwendbare und ausreichend genaue Rechenmethode für das Demodulatorstörverhalten.

6. ZUSAMMENFASSUNG

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte allgemeine Ersatzmodell ermöglicht die Berechnung des Störverhaltens von Phasenregelkreisen mit weitgehend beliebigen nichtlinearen Phasendiskriminatoren. Dabei ist insbesondere die praktisch wichtige Klasse der Begrenzer-Diskriminatoren mit sinus-, dreieck- oder sägezahnförmiger Charakteristik eingeschlossen, für welche die bisher weitgehend unbekannten Eigenschaften solcher Kreise bei Rauschstörungen mit Hilfe des entwickelten Modells in einem weiten Bereich des Signal-Rauschverhältnisses berechnet werden.

Das Ersatzschaltbild beruht auf einer Modellbildung des Phasendiskriminators einschließlich etwa vorhandener Begrenzer derart, daß seine nichtlinearen Eigenschaften einheitlich durch eine das Nutzsignal darstellende Regelkennlinie - die Modellkennlinie $g'(\varphi)$ - und einen Störanteil - das äquivalente Phasenrauschen $n'(t)$ - beschrieben werden. Die explizite Berechnung der Modellkennlinie und der Statistik des äquivalenten Phasenrauschens für die einzelnen Diskriminator-Realisierungen ist für die Anwendung des Modells notwendig und umfaßt daher den Hauptteil des 3. Kapitels der Arbeit. Durch diese Kenngrößen wird dann im wesentlichen das allgemeine Ersatzmodell für den geschlossenen Regelkreis beschrieben, welches als Sonderfall auch das bekannte, auf einfache Multipliziererdiskriminatoren beschränkte PLL-Rauschersatzschaltbild enthält. Dabei ergeben sich - im Gegensatz zu diesem Sonderfall - die Kenngrößen des Modells im allgemeinen als Funktionen des Eingangs-Störabstandes mit den in Tabelle 3.1 zusammengefaßten Formeln. Darüberhinaus bieten die grafischen Darstellungen dieser Kenngrößen in Abschnitt 3.5 eine nützliche Hilfe bei der Berechnung des geschlossenen Kreises.

Für das PLL-Störverhalten werden in Kapitel 4 auf dem Ersatzmodell aufbauende Berechnungsverfahren angegeben, während die

damit erhaltenen und für Begrenzer-Diskriminatoren neuen Ergebnisse und deren meßtechnische Überprüfung in Kapitel 5 aufgeführt sind.

Die Varianz des Phasenfehlers kann wegen der Struktur des Ersatzmodells mit bekannten Berechnungsverfahren behandelt werden, z.B. mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung oder - für nicht zu große Störungen - mit einer Linearisierung des nichtlinearen Modells. Dabei zeigt sich, daß die für Regelkreise mit Phasendiskriminatoren ohne Begrenzer bis zu mittleren Störleistungen sehr nützlichen und einfachen Beziehungen der Gesamtlinearisierung bei Begrenzer-Diskriminatoren nur für wesentlich größere Störabstände verwendbar sind. Eine vergleichbare, ebenfalls im Bereich mittlerer Störleistungen gültige Näherung erfordert dann die Berücksichtigung der vom Eingangssignal-Rauschverhältnis abhängigen Steigung der Modellkennlinie. Wie die Ergebnisse in Abschnitt 5.2 zeigen, ergeben sich - abhängig von der verwendeten Diskriminator-Realisierung - große Unterschiede für die Varianz des Phasenfehlers.

Die Berechnung der Häufigkeit von 2π -Phasensprüngen sowie die Behandlung des PLL-Fangverhaltens erfordern die volle Berücksichtigung der Nichtlinearität des Modells. Die hier erstmals für Begrenzer-Diskriminatoren durchgeführte Berechnung des Halte- und Fangbereichs erfolgt dabei mit einem Ansatz, der die Rauschstörung näherungsweise berücksichtigt und meßtechnisch relativ gut bestätigt werden kann.

Schließlich wird gezeigt, daß sich das Ersatzmodell auch zur Untersuchung der Demodulationseigenschaften des PLL bei frequenzmodulierten verrauschten Signalen eignet. Unabhängig vom verwendeten Phasendiskriminator ergibt sich bei geringen eingangsseitigen Störungen der bekannt hohe Störabstandsgewinn des Modulationsverfahrens. Die bei großen Eingangsstörungen auftretende Demodulatorschwelle ist eine Folge der nichtlinearen Systemeigenschaften. Mit Hilfe des Modells und mit einer Abschätzung der Gültigkeitsgrenze der linearen Näherung

gelingt es, eine optimale Dimensionierung des PLL-Demodulators zu finden und den minimalen Schwellwert zu berechnen. Es zeigt sich, daß die Demodulatorschwelle für alle Phasendiskriminatoren in etwa beim gleichen Eingangs-Störabstand liegt.

A N H A N G

A1 Berechnung der Signal-Unterdrückungsfaktoren

Bei der Berechnung der Signal-Unterdrückungsfaktoren μ_v in Abschnitt 3.2 zur Beschreibung der Modellkennlinien $g'(\varphi)$ ist der Erwartungswert ($v=1,2,3,\dots$)

$$\mu_v = \overline{\cos v\phi_n} = E\{\cos v\phi_n\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos v\phi_n p(\phi_n) d\phi_n \quad (A1.1)$$

zu berechnen. Dabei ist $p(\phi_n)$ die Verteilungsdichte der Störphase des verrauschten Eingangssignals (Summe aus sinusförmigem Sendersignal u_1 und gaußverteiletem Schmalbandrauschen $n(t)$) nach Gl. (2.7c). Für $p(\phi_n)$ gilt unter den vorliegenden Verhältnissen die Integraldarstellung in Gl. (3.13). Damit lautet Gl. (A1.1) bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge (Die Einhüllende A ist im Bereich $0 \leq A < \infty$ und die Phase ϕ_n im Bereich $-\pi \leq \phi_n \leq \pi$ definiert):

$$\mu_v = \frac{1}{2\pi n^2} e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2n^2}} \int_0^\infty A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos v\phi_n \cdot e^{\frac{\hat{u}_1 A}{n^2} \cos \phi_n} d\phi_n dA \quad (A1.2)$$

Das Integral über ϕ_n ist die Integraldarstellung der modifizierten Besselfunktionen [16]

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos v\phi_n e^{\frac{\hat{u}_1 A}{n^2} \cos \phi_n} d\phi_n = 2\pi I_v \left[\frac{\hat{u}_1 A}{n^2} \right] \quad (A1.3)$$

Es verbleibt dann noch ein Integral der Form

$$F = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} I_{\nu}(bx) dx \quad (A1.4)$$

Eine partielle Integration unter Anwendung der Rekursionsformel [16]

$$\frac{d}{dx} I_{\nu}(bx) = \frac{1}{2}b [I_{\nu-1}(bx) + I_{\nu+1}(bx)] \quad (A1.5)$$

führt auf das Zwischenergebnis

$$F = \frac{b}{4a} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} [I_{\nu-1}(bx) + I_{\nu+1}(bx)] dx \quad (A1.6)$$

Diese Form ist in [17] tabelliert. Es gilt allgemein:

$$F = \frac{b}{8a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{8a}} \left[\frac{I_{\nu-1}}{2} \left(\frac{b^2}{8a} \right) + \frac{I_{\nu+1}}{2} \left(\frac{b^2}{8a} \right) \right] \quad (A1.7)$$

Damit und mit der Definition für den HF-Störabstand $(SNR)_1$ erhält man aus Gl. (A1.2) sofort das Ergebnis für μ_{ν} in Gl. (3.22).

A2 Berechnung der Leistung $\overline{n'^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Sinuskennlinie

Nach Gl.(3.24) ist das bestimmte Integral

$$\overline{n'^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 \phi_n p(\phi_n) d\phi_n \quad (\text{A2.1})$$

zu lösen. Mit $p(\phi_n)$ nach Gl.(3.13) und nach Umformung des $\sin^2$ -Terms ergibt sich:

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{4\pi n^2} e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2n^2}} \int_0^\infty A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} \cdot \left[\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\frac{\hat{u}_1 A}{n^2} \cos \phi_n} d\phi_n - \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2\phi_n e^{\frac{\hat{u}_1 A}{n^2} \cos \phi_n} d\phi_n \right] dA \quad (\text{A2.2})$$

Die Integrale über ϕ_n definieren die modifizierten Besselfunktionen 0. und 2. Ordnung [16]

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{2n^2} e^{-\frac{\hat{u}_1^2}{2n^2}} \int_0^\infty A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} \left[I_0\left(\frac{\hat{u}_1 A}{n^2}\right) - I_2\left(\frac{\hat{u}_1 A}{n^2}\right) \right] dA. \quad (\text{A2.3})$$

Mit einer Rekursionsformel für modifizierte Besselfunktionen [16]

$$I_0(z) - I_2(z) = \frac{2}{z} I_1(z) \quad (\text{A2.4})$$

erhält Gl.(A2.3) die tabellierte Form wie Gl.(A1.7). Damit erhält man das Zwischenergebnis:

$$\overline{n^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{(\text{SNR})_1}} e^{-(\text{SNR})_1/2} I_{\frac{1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \quad (\text{A2.5})$$

Für die Besselfunktion $I_{\frac{1}{2}}$ gilt [16]:

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} [e^z - e^{-z}] \quad (\text{A2.6})$$

Damit folgt aus Gl. (A2.5) sofort das Endergebnis Gl. (3.25).

A3 Berechnung der Leistung $\overline{n^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Dreieckkennlinie

Die Verteilungsdichte $p(\phi_n)$ ist eine bezüglich $\phi_n=0$ gerade Funktion $p(\phi_n) = p(-\phi_n)$, wie sich anhand von Gl.(3.13) zeigen läßt. Man kann daher die Integration in Gl.(3.28) zur Berechnung von $\overline{n^2}$ auf zwei stückweise lineare Segmente der Dreieckkennlinie $g(\phi_n)$ beschränken

$$\begin{aligned}\overline{n^2} &= 2 \int_0^{\pi} g^2(\phi_n) p(\phi_n) d\phi_n = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \phi_n^2 p(\phi_n) d\phi_n + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - \phi_n)^2 p(\phi_n) d\phi_n\end{aligned}\quad (\text{A3.1})$$

Durch die Substitution $\pi - \phi_n = X$ im zweiten Summanden kann das Integrationsintervall weiter eingeschränkt werden:

$$\overline{n^2} = 2 \int_0^{\pi/2} \phi_n^2 [p(\phi_n) + p(\phi_n - \pi)] d\phi_n \quad (\text{A3.2})$$

Der Integrand im ersten Summanden hat die Form wie in Gl. (A4.1) und wird entsprechend Anhang A4 berechnet.

Betrachtet man den zweiten Summanden und setzt das Argument $(\phi_n - \pi)$ in die Verteilungsdichte $p(\phi_n)$ Gl.(3.13) ein, so kann auch dieser Summand wegen $\cos(\phi_n - \pi) = -\cos \phi_n$, wie in Anhang A4 ausgeführt, berechnet werden. Neben der oberen Integrationsgrenze ändert sich gegenüber Gl.(A4.2) nur das Vorzeichen des Exponenten, wofür dann die Anger-Jacobi-Formel [16] in der Form

$$e^{-a \cos \phi_n} = I_0(a) + 2 \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v I_v(a) \cos v \phi_n \quad (\text{A3.3})$$

zur Anwendung kommt. Somit liefert die Integration beider Summanden in Gl.(A3.2) im wesentlichen das gleiche Ergebnis. Beide unterscheiden sich nur durch das alternierende Vorzeichen wegen Gl.(A3.3). In der Summe heben sich daher die ungeraden Glieder auf. Im Ergebnis Gl.(3.31) enthält die Summe deswegen nur gerade Ordnungszahlen.

A4 Berechnung der Leistung $\overline{n'^2}$ beim Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie

Ausgehend von Gl. (3.34)

$$\overline{n'^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2 p(\phi_n) d\phi_n = 2 \int_0^{\pi} \phi_n^2 p(\phi_n) d\phi_n \quad (\text{A4.1})$$

erhält man mit $p(\phi_n)$ nach Gl. (3.13)

$$\overline{n'^2} = \frac{1}{\pi n^2} e^{-\frac{\hat{a}_1^2}{2n^2}} \int_0^{\infty} A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} \int_0^{\pi} \phi_n^2 e^{\frac{\hat{a}_1 A}{n^2} \cos \phi_n} d\phi_n dA. \quad (\text{A4.2})$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung (Anger-Jacobi-Formel) [16]:

$$e^{a \cos \phi_n} = I_0(a) + 2 \sum_{v=1}^{\infty} I_v(a) \cos v \phi_n \quad (\text{A4.3})$$

ist das innere Integral leicht lösbar, und es ergibt sich die Reihe

$$\begin{aligned} \overline{n'^2} = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{\hat{a}_1^2}{2n^2}} & \left[\frac{\pi^2}{3} \int_0^{\infty} A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} I_0\left[\frac{\hat{a}_1 A}{n^2}\right] dA + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^2} \int_0^{\infty} A e^{-\frac{A^2}{2n^2}} I_v\left[\frac{\hat{a}_1 A}{n^2}\right] dA \right] \quad (\text{A4.4}) \end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrale haben die Form von Gl. (A1.4) und (A1.7).

Damit wird

$$\begin{aligned} \overline{n^2} = 2\sqrt{\pi(\text{SNR})_1} e^{-\frac{(\text{SNR})_1}{2}} & \left\{ \frac{\pi^2}{12} \left[I_{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] + I_{\frac{1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \right] + \right. \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2} \left[I_{\frac{\nu-1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] + \right. \\ & \left. \left. + I_{\frac{\nu+1}{2}} \left[\frac{(\text{SNR})_1}{2} \right] \right] \right\} \quad (\text{A4.5}) \end{aligned}$$

Für die Besselfunktion $I_{-\frac{1}{2}}$ gilt [16]:

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} [e^z + e^{-z}] .$$

Zusammen mit Gl.(A2.6) und bei Berücksichtigung der Gl.(3.22) für die Signal-Unterdrückungsfaktoren erhält man das Ergebnis Gl.(3.35).

A5 Berechnung der Bandbreite B'_1 beim Begrenzer-Diskriminator mit Sägezahnkennlinie

Gesucht ist die Bandbreite des Phasenrauschens nach Gl.(3.33)

$$n'(t) = \dot{\phi}_n(t) \quad -\pi \leq \phi_n \leq +\pi$$

für $(\text{SNR})_1 \rightarrow 0$. Es ist dann:

$$\begin{aligned} u_1(t) + n(t) &\approx n(t) = n_C(t) \cos \Omega_{20} t - n_S(t) \sin \Omega_{20} t = \\ &= A(t) \sin(\Omega_{20} t + \phi_n). \end{aligned} \quad (\text{A5.1})$$

n , n_C und n_S sind gaußverteilt, daher kann die vierdimensionale Verbundverteilungsdichte

$$\begin{aligned} p[n_C(t), n_C(t-\tau), n_S(t), n_S(t-\tau)] &= p(n_{C1}, n_{C2}, n_{S1}, n_{S2}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi n^2)^2 (1-r_{n_C}^2(\tau))} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n^2 (1-r_{n_C}^2(\tau))} [n_{C1}^2 + n_{C2}^2 + \\ &\quad + n_{S1}^2 + n_{S2}^2 - 2r_{n_C}(\tau) \cdot (n_{C1} n_{C2} + n_{S1} n_{S2})]} \end{aligned} \quad (\text{A5.2})$$

$$(r_{n_C}(\tau) = \frac{1}{n_C^2} \cdot R_{n_C}(\tau) = \text{Kovarianzfunktion von } n_C \text{ bzw. } n_S)$$

nach bekannten Regeln [6] angegeben werden.

Durch nichtlineare Transformation der Verteilungsdichte entsprechend den Zusammenhängen zwischen A und ϕ_n einerseits und n_C und n_S andererseits (vergl. Gl.(A5.1)) erhält man:

$$\begin{aligned}
 p[A(t), A(t-\tau), \phi_n(t), \phi_n(t-\tau)] &= p(A_1, A_2, \phi_{n_1}, \phi_{n_2}) = \\
 &= \frac{A_1 A_2}{(2\pi n_C^2)^2 (1-r_{n_C}^2(\tau))} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{n_C^2 (1-r_{n_C}^2(\tau))} [A_1^2 + A_2^2 - \\
 &\quad - 2r_{n_C}(\tau) A_1 A_2 \cos(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})]}
 \end{aligned}
 \tag{A5.3}$$

Eine zweifache Integration liefert die Randverteilungsdichte

$$\begin{aligned}
 p(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}) &= \frac{1-r_{n_C}^2(\tau)}{(2\pi)^2 [1-r_{n_C}^2(\tau) \cos^2(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})]^{2/3}} \\
 &\cdot \left\{ r_{n_C}(\tau) \cos(\phi_{n_1} - \phi_{n_2}) \arcsin[r_{n_C}(\tau) \cos(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})] \right. \\
 &+ \frac{\pi}{2} r_{n_C}(\tau) \cos(\phi_{n_1} - \phi_{n_2}) \\
 &\left. + \sqrt{1-r_{n_C}^2(\tau) \cos^2(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{A5.4}$$

Diese Verteilung wird zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion $R_{\phi_n}(\tau)$ von ϕ_n benötigt. Die dabei erforderliche zweifache Integration lässt sich durchführen, wenn man wegen

$$R_{\phi_n}(\tau) = \overline{(\phi_{n_1} \phi_{n_2})^2} = \overline{\phi_n^2} - \frac{1}{2} \overline{(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})^2}$$

zunächst $\overline{(\phi_{n_1} - \phi_{n_2})^2}$ mit Gl. (A5.4) berechnet. Es wird:

$$R_{\phi_n}(\tau) = \frac{\pi}{2} \arcsin[r_{n_C}(\tau)] + \frac{1}{2} \arcsin^2[r_{n_C}(\tau)] - \frac{1}{4} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{[r_{n_C}(\tau)]^{2v}}{v^2} \quad (\text{A5.5})$$

Aus der Autokorrelierten $R_{\phi_n}(\tau)$ ergibt sich schließlich die äquivalente Rauschbandbreite des Prozesses ϕ_n zu:

$$B_1' = \frac{\sigma_{\phi_n}^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\phi_n}(\tau) d\tau} = \frac{\pi^2}{3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\phi_n}(\tau) d\tau \right]^{-1}$$

$$\text{für } (\text{SNR})_1 \rightarrow 0. \quad (\text{A5.6})$$

Zunächst kann man mit der Abschätzung

$$0 < \int_0^{\infty} [r_{n_C}(\tau)]^k d\tau < \frac{1}{2B_1} \quad (\text{A5.7})$$

(wegen $\int_0^{\infty} r_{n_C}(\tau) d\tau = \frac{1}{2B_1}$) nach einer Reihenentwicklung des $\arcsin$ in Gl. (A5.5) den Wertebereich für B_1'/B_1 einschränken

$$1 < \frac{B_1'}{B_1} < \frac{2}{3} \pi . \quad (\text{A5.8})$$

Speziell bei Annahme einer scharfen Bandbegrenzung (Rechteck-HF-Vorfilter) gilt

$$r_{nC}(\tau) = \frac{\sin \pi B_1 \tau}{\pi B_1 \tau} \quad (\text{A5.9})$$

und die numerische Integration gemäß Gl.(A5.6) liefert:

$$B_1' = 1,3517 B_1. \quad (\text{A5.10})$$

A6 Berechnung der äquivalenten Verstärkungsfaktoren

Nach einer partiellen Integration und unter der näherungsweise erfüllten Voraussetzung einer Gauß-Verteilung für $p(\varphi)$ [z.B. 6,21] wird die integrale Beziehung Gl. (3.48)

$$K_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g'(\varphi)}{\partial \varphi} e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}} d\varphi. \quad (\text{A6.1})$$

Sinus-PD mit Begrenzer

Die Ableitung von $g'(\varphi)$ nach Tabelle 3.1 ist:

$$\frac{\partial g'(\varphi)}{\partial \varphi} = \mu_1 \cos \varphi. \quad (\text{A6.2})$$

In [22] findet man die Lösung für das bestimmte Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos k\varphi \cdot e^{-\frac{\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}} d\varphi = \sqrt{2\pi} \sigma_\varphi e^{-k^2 \frac{\sigma_\varphi^2}{2}} \quad (\text{A6.3})$$

Somit gilt für K_e :

$$K_e = \mu_1 e^{-\frac{\sigma_\varphi^2}{2}}. \quad (\text{A6.4})$$

Dreieck-PD mit Begrenzer

Die Ableitung der Kennlinie $g'(\varphi)$ ist:

$$\frac{\partial g'(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k} \mu_k \cos k\varphi. \quad (\text{A6.5})$$

Mit Gl. (A6.3) wird daher K_e :

$$K_e = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{1}{k} \mu_k e^{-k^2 \frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}}. \quad (A6.6)$$

Sägezahn-PD mit Begrenzer

Es ergeben sich nach Tabelle 3.1 und Gl. (A6.3)

$$\frac{\partial g'(\varphi)}{\partial \varphi} = 2 \sum_{v=1,2,3}^{\infty} (-1)^{v+1} \mu_v \cos v\varphi \quad (A6.7)$$

$$K_e = 2 \sum_{v=1,2}^{\infty} (-1)^{v+1} \mu_v e^{-v^2 \frac{\sigma_{\varphi}^2}{2}}. \quad (A6.8)$$

A7 Berechnung der Fokker-Planck-Koeffizienten für den PLL 1.Ordnung

Zunächst wird zur Bestimmung der A_v nach Gl.(4.13) und (4.14) $\Delta\varphi$ aus der Systemdifferentialgleichung (3.47) durch Integration über das infinitesimale Intervall $[t, t+\Delta t]$ berechnet

$$\Delta\varphi = \int_t^{t+\Delta t} d\varphi = -\omega_s \left[g'(\varphi) \cdot \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} n'(\tau) d\tau \right] . \quad (A7.1)$$

Daraus ergibt sich für A_1 der Grenzwert des linearen bedingten Mittelwertes entsprechend Gl.(4.13) wegen der Mittelwertfreiheit von $n'(t)$ zu:

$$A_1(\varphi) = -\omega_s g'(\varphi) \quad (A7.2)$$

Für den Grenzwert des quadratischen bedingten Mittelwertes gilt

$$A_2(\varphi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega_s^2}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \overline{n'(\tau_1) n'(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 . \quad (A7.3)$$

Der Integrand ist die Autokorrelationsfunktion R_n , des äquivalenten Phasenrauschens $n'(t)$, die hier wegen $f_R \ll B_1$ in guter Näherung durch einen Dirac-Impuls δ_0 beschrieben werden kann

$$\overline{n'(\tau_1) n'(\tau_2)} = R_n(\tau_1 - \tau_2) = N'_0 \delta_0(\tau_1 - \tau_2) . \quad (A7.4)$$

Die Integration und der Grenzübergang liefern dann für A_2 :

$$A_2 = \omega_s^2 N'_0 \quad (A7.5)$$

A8 Zur Berechnung der mittleren Zeit zwischen 2π -Phasensprüngen

Ableitung von Gl.(4.42):

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung (4.41) mit den Randbedingungen $r(-2\pi) = 0$ und $r(+2\pi) = 0$ (vgl. Gl.4.40b) lautet (δ_{-1} = Sprungfunktion, a nach Gl. 4.15):

$$r(\varphi) = e^{-a \int_{-2\pi}^{\varphi} g'(x) dx} \cdot e^{\int_{-2\pi}^{\varphi} \frac{a}{\omega_s} [A - \delta_{-1}(w)] dw} \cdot e^{a \int_{-2\pi}^w g'(x) dx} \quad (A8.1)$$

Aus der Bedingung $r(2\pi) = 0$ folgt hieraus zunächst

$$e^{a \int_{-2\pi}^{2\pi} g'(x) dx} \cdot e^{\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{a}{\omega_s} [A - \delta_{-1}(w)] dw} = 0 \quad (A8.2)$$

Da die Exponentialfunktion im Integranden gerade ist, folgt, daß $[A - \delta_{-1}(w)]$ ungerade sein muß, damit das Integral in symmetrischen Grenzen in Gl.(A8.2) verschwindet. Damit ergibt sich für die Integrationskonstante $A = 1/2$.

Vereinfachung der Integrationsgrenzen:

Aus Gl.(A8.1) mit $A = 1/2$ folgt:

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= e^{-a \int_{-2\pi}^{\varphi} g'(x) dx} \cdot e^{\int_{-2\pi}^{\varphi} \frac{a}{\omega_s} [\frac{1}{2} - \delta_{-1}(w)] dw} \cdot e^{a \int_{-2\pi}^w g'(x) dx} \\ &= e^{-a \int_{-2\pi}^{\varphi} g'(x) dx} \cdot e^{\int_{-2\pi}^{\varphi} \frac{a}{\omega_s} [\frac{1}{2} - \delta_{-1}(w)] dw} \cdot e^{a \int_{-2\pi}^w g'(x) dx} \quad (A8.3) \end{aligned}$$

Der Integrand des über w gebildeten Integrals ist eine ungerade Funktion $f_u(w)$, so daß gilt:

$$\int_{-2\pi}^{\varphi} f_u(w) dw = \int_{-2\pi}^{-\varphi} f_u(w) dw = - \int_{\varphi}^{2\pi} f_u(w) dw \quad (\text{A8.4})$$

Damit folgt aus Gl. (A8.3) direkt die Gl. (4.42).

Ableitung von Gl. (4.43):

Mit den Gl. (4.39), (4.42) und (3.45) gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{2\pi} &= \int_{-2\pi}^{+2\pi} r(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} r(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a}{\omega_s} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-aG'(\varphi)} \left[\int_{w=\varphi}^{2\pi} e^{aG'(w)} dw \right] d\varphi \quad (\text{A8.5}) \end{aligned}$$

Durch Symmetriebetrachtungen kann das zunächst dreieckförmige Integrationsgebiet in der w, φ -Ebene auf ein Rechteck beschränkt werden und das Doppelintegral in Gl. (A8.5) damit zu einem Produkt von zwei einfachen bestimmten Integralen vereinfacht werden:

Der Integrand des über φ gebildeten Integrals ist zunächst ohne nutzbare Symmetrie. Man erhält nun durch die Aufspaltung (der Integrand ist eine bezüglich π gerade Funktion):

$$\begin{aligned} \int_{w=\varphi}^{2\pi} e^{aG'(w)} dw &= \int_{\varphi}^{\pi} e^{aG'(w)} dw + \int_{\pi}^{2\pi} e^{aG'(w)} dw = \\ &= \int_{\varphi}^{\pi} e^{aG'(w)} dw + \int_0^{\pi} e^{aG'(w)} dw \quad (\text{A8.6}) \end{aligned}$$

einen bezüglich π ungeraden und einen konstanten, von φ unabhängigen (Subtraktion des Mittelwertes) Anteil.

Gl.(A8.5) wird damit:

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_{2\pi} \cdot \omega_s = & a \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-aG'(\varphi)} \left[\int_{w=0}^{\pi} e^{aG'(w)} dw \right] d\varphi + \\ & + a \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-aG'(\varphi)} \left[\int_{w=0}^{\pi} e^{aG'(w)} dw \right] d\varphi . \end{aligned} \quad (A8.7)$$

Die Integration im ersten Summanden von Gl.(A8.7) liefert Null, da der Integrand eine bezüglich π ungerade Funktion ist (der erste Faktor ist eine gerade, der zweite Faktor eine ungerade Funktion von φ bezüglich π), die innerhalb symmetrischer Grenzen integriert wird.

Als Ergebnis verbleibt der zweite Summand in Gl.(A8.7). Das innere, über w gebildete Integral ist jetzt unabhängig von φ und kann getrennt integriert werden. Beschränkt man nun noch wegen der Symmetrie des Integranden das Integrationsintervall auf $\varphi \in [0, \pi]$, so erhält man das Ergebnis Gl.(4.43).

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [1] Tikhonov, V.I.:
The Effect of Noise on Phase-Locked Oscillator
Operation
Automation and Remote Control, 20, No.9, 1959.
S.1160-1168
- [2] Tikhonov, V.I.:
Phase-Lock Automatic Frequency Control Operation
in the Presence of Noise
Automation and Remote Control, 21, No.3, 1960
S. 209-214
- [3] Viterbi, A.J.:
Phase-Locked Loop Dynamics in the Presence of Noise
by Fokker-Planck Techniques
Proc. IEEE, Vol.51, No.12, 1963, S.1737-1753
- [4] Develet, J.A.:
A Threshold Criterion for Phase-Lock-Demodulation
Proc. IEEE, Vol.51, No.2, 1963, S.349-356
- [5] Van Trees, H.L.:
Functional Techniques for the Analysis of the Nonlinear
Behavior of Phase-Locked Loops
Proc. IEEE, Vol.52, No.8, 1964, S.894-911
- [6] Davenport, W.B.; Root, W.L.:
An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise
McGraw-Hill, New York, 1958
- [7] Lindsey, W.C.:
Synchronization Systems in Communication and Control
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972

- [8] Viterbi, A.J.:
Principles of Coherent Communication
McGraw-Hill, New York, 1966

- [9] Brunk, M.; Rosenkranz, W.:
Nichtlineare Behandlung der Nachlaufsynchronisation
(Phase-Locked Loop, PLL) bei verrauschten Eingangssignalen
Arbeitsbericht zum DFG Forschungsvorh. AZ:Br617/2, 1977

- [10] Gardner, F.M.:
Phaselock Techniques
John Wiley & Sons, New York, 1967

- [11] Rosenkranz, W.:
Störverhalten analoger Nachlaufsynchronisationsschaltungen
Dipl.Arb. Inst. f. Nachrichtentechnik, Erlangen 1976

- [12] Davenport, W.B.:
Signal-to-Noise Ratios in Band-Pass-Limiters
Journ. of Applied Physics, Vol.24, No.6, 1953, S.720-727

- [13] Springett, J.C.; Simon, M.K.:
An Analysis of the Phase Coherent-Incoherent Output of the Bandpass Limiter
IEEE Trans. on Comm. Techn., COM-19, No.1, 1971, S.42-49

- [14] Pouzet, A.H.:
Characteristics of Phase Detectors in Presence of Noise
Proc. of the 1972 International Telemetry Conf.,
Los Angeles, 1972, S.818-828

- [15] Price, R.:
A Note on the Envelope and Phase-Modulated Components of Narrow-Band Gaussian Noise
IRE Trans. on Inform. Theory, IT-1, No.2, 1955, S.9-13

- [16] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.:
Handbook of Mathematical Functions
Dover Publications, New York, 1965
- [17] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M.:
Table of Integrals, Series, and Products
Academic Press, New York, 1965
- [18] Springett, J.C.:
A Note on Signal-to-Noise and Signal-to-Noise Spectral
Density Ratios at the Output of a Filter-Limiter
Combination
Jet Propulsion Lab., Pasadena, Space Programs Summary,
37-36, Vol.4, 1965
- [19] Tausworthe, R.C.:
A Method of Calculating Phase-Locked Loop Performance
Near Threshold
IEEE Trans. on Comm. Techn., COM-15, No.4, 1967,
S. 502-506
- [20] Booten, R.C.:
Nonlinear Control Systems with Random Inputs
IRE Trans. on Circuit Theory, 1954, S.9-18
- [21] Schlitt, H.:
Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen
Regelkreisen
Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968
- [22] Oberhettinger, F.:
Tabellen zur Fouriertransformation
Springer, Berlin, 1957

- [23] Nikitin, N.P.:
Cut-off in Tracking in a Network of Phase Automatic
Frequency Control
Automation and Remote Control, 26, 1965, S.669-675
- [24] Holmes, J.K.:
On a Solution to the Second-Order Phase-Locked Loop
IEEE Trans. on Comm. Techn., COM-18, No.2, 1970,
S.119-126
- [25] Charles, F.J.; Lindsey, W.C.:
Some Analytical and Experimental Phase-Locked Loop
Results for Low Signal-to-Noise Ratios
Proc. IEEE, Vol.54, No.9, 1966
- [26] Middleton, D.:
An Introduction to Statistical Communication Theory
McGraw Hill, New York, 1960
- [27] Bronstein, I; Semendjajew, K.:
Taschenbuch der Mathematik
Harry Deutsch, Frankfurt, 1970
- [28] Bozzoni, E.; Marchetti, G.; Mengali, U.; Russo, F.:
An Extension of Viterbi's Analysis of the Cycle Slipp-
ing in a First-Order Phase-Locked Loop
IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems,
AES-6, No.4, 1970, S.484-489
- [29] Hummels, D.:
Some Simulation Results for the Time to Indicate
Phase Lock
IEEE Trans. on Comm., COM-20, No.1, 1972, S.37-43
- [30] Goldman, S.L.:
Second-Order Phase-Lock-Loop Acquisition Time in the
Presence of Narrow-Band Gaussian Noise
IEEE Trans. on Comm., COM-21, No.4, 1973, S.297-300

- [31] Brunk, M.:
Über ein Näherungsverfahren zur Berechnung des Fangbereichs phasensynchronisierter Oszillatoren
AEÜ, Band 27, Nr.9, 1973, S.368-374
- [32] Govindarajan, M.S.; Rao, B.V.:
On a Closed Form Expression for Phase-Locked Loop Pull-In Range
IEEE Trans. on Comm., COM-24, No.8, 1976, S.910-913
- [33] Cahn, C.R.:
Piecewise Linear Analysis of Phase-Locked Loops
IRE Trans. on Space Electr. and Telemetry, SET-8, 1962, S.8-13
- [34] Protonotarios, E.N.:
Pull-In Performance of a Piecewise Linear Phase-Locked Loop
IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, AES-5, No.3, 1969, S.376-386
- [35] Brunk, M.; Rosenkranz, W.:
The Pull-In Range of Imperfect Second-Order Phase-Locked Loops with Piecewise Linear Phase-Detector Characteristics
AEÜ, Band 33, Nr.12, 1979, S.484-490
- [36] Brunk, M.:
Der Fangbereich von Nachlaufsynchronisationsschaltungen mit sinusförmiger Charakteristik des Phasendiskriminators
AEÜ, Band 19, Nr.12, 1965, S.649-663
- [37] Verrazzani, L.:
Pull-In Time and Range of Any Order Generalized PLL
IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, AES-14, No.2, 1978, S.329-333

- [38] Taub, H.; Schilling, D.L.:
Principles of Communication Systems
McGraw-Hill, New York, 1971

- [39] Abel, F.:
Möglichkeiten und Grenzen der Verbesserung des
Schwellwertverhaltens von FM-Demodulatoren
Diss. am Inst. f. Hochfrequenztechnik, TU-Hannover, 1978

- [40] Schilling, D.L.; Billig, J.:
On the Threshold Extension Capability of the PLL and
the FDMFB
Proc. IEEE, Vol.52, No.5, 1964, S.621-622

- [41] Klapper, J.; Frankle, J.T.:
Phase-Locked and Frequency-Feedback Systems
Academic Press, New York, 1972

- [42] Göller, M.:
Beitrag zur Dimensionierung von FM-Optimaldemodulatoren
Nachrichtentechnik, Elektronik, Teil 1: Band 24, Nr.5,
1974, S.192-195. Teil 2: Band 24, Nr.5, 1974, S.266-270

- [43] Schübler, H.W.:
Nachrichtenübertragung I
Skriptum des Lehrstuhls für Nachrichtentechnik, Univ.
Erlangen-Nürnberg, Nr.7, 1979

- [44] Gupta, S.C.; Bayless, J.W.; Hummels, D.R.:
Threshold Investigation of Phase-Locked Discriminators
IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, AES-4,
No.6, 1968, S.855-862

- [45] Kühne, F.:
Theorie der Gegenkopplungsdemodulation frequenzmodulier-
ter Signale
Diss. an der Fakultät f. Maschinenwesen und Elektro-
technik, TH München, 1967

- [46] Butman, S.A.; Lesh, J.R.:
The Effect of Bandpass Limiters on n-Phase Tracking Systems
IEEE Trans. on Comm., COM-25, No.6, 1977, S.569-576
- [47] Hespelt, V.:
Die Volterra-Funktionalreihe - Ein Hilfsmittel zur Berechnung der Verzerrungen nichtlinearer Systeme
AEG-Telefunken EV/S-Mitteilung C5/74, Backnang, 1974
- [48] Schedel, J.:
Meßgerät für Phasensprünge in Phase-Locked Loops
Hausarb. am Lehrst. f. Nachrichtent., Erlangen, 1978
- [49] Hampl, O.:
Untersuchung des Fangverhaltens analoger Nachlaufsynchronisationsschaltungen (PLL) bei verdrauschten Eingangssignalen
Dipl.-Arb. am Lehrst. f. Nachrichtent., Erlangen, 1978
- [50] Hutzler, H.:
Untersuchung von Phasensprüngen in gestörten PLL-Schaltungen
Hausarb. am Lehrst. f. Nachrichtent., Erlangen, 1979

L e b e n s l a u f

- 13.7.1949 geboren in Augsburg
- 1956 - 1960 Volksschule in Frankfurt/M. und Siegen/Westf.
- 1960 - 1968 Matthias-Grünwald Gymnasium in
Tauberbischofsheim/Baden
- 1968 Abitur
- 1968 - 1970 Ableistung der Wehrpflicht in Veitshöchheim
bei Würzburg
- 1970 Vorpraktikum zum Studium der Elektrotechnik
bei der Fa. König & Bauer Schnellpressen-
fabrik in Würzburg
- 1970 - 1976 Studium der Elektrotechnik an der Universität
Erlangen-Nürnberg
- 1972 1. Teil des Fachpraktikums bei der Fa. Siemens
(Medizinische Technik) in Erlangen
- 1975 2. Teil des Fachpraktikums bei der Fa. Siemens
(Energietechnik) in Erlangen
- 1976 Abschluß des Studiums mit Diplomhauptprüfung
und Diplomarbeit
- seit 1976 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl
für Nachrichtentechnik der Universität
Erlangen-Nürnberg

Werner Rosenkranz

(Werner Rosenkranz)

Copy - Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131 - 26197